令和４年度

名古屋大学 大学院 情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（オンライン筆記試験 第１科目）

令和３年８月５日

解答時間　１２：３０－１４：００
答案提出　１４：００－１４：１５

注意事項

1. 受験票の同封物：「令和４年度 数理情報学専攻８月入試（博士前期課程）について」および入試連絡票に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。

2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。

3. 日本語または英語で解答すること。

4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、グラフ理論、数学基礎論、量子力学、アルゴリズム設計法の７問である。このうち３問を選択して解答すること。選択した問題名を解答用紙の上部に記入すること。

5. 全ての解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

6. 問題ごとに異なる解答用紙を用いること。１枚の解答用紙に書ききれない場合は、２枚目の解答用紙を使用してもよい。２枚目を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

7. 解答用紙を提出する前に各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に 1/k, 2/k,⋯, k/k と番号をつけて提出すること。

8. 指定された方法で解答用紙を提出すること。

9. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに緊急連絡先：090-5617-0248（日本国外から：+81-90-5617-0248）へ連絡しその指示に従うこと。

1: 線形代数

e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 を $\mathbb{R}^5$ の標準基底 (standard basis) とする．$L: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ を条件

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad L(e_4) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad L(e_5) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

（ただし，$a, b, c \in \mathbb{R}$）を満たす線形写像 (linear map) とする．以下の各問に答えよ．

(1) 標準基底における写像 L の表現行列 (representation matrix) を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, L = \{v \in \mathbb{R}^5 : L(v) = \mathbf{0}\}$ （ただし，$\mathbf{0}$ は零ベクトル）が $\{\mathbf{0}\}$ となる a, b, c をすべて求めよ．

(3) $a = 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とするとき，$L(e_1), L(e_2), L(e_3), L(e_4), L(e_5)$ によって張られる $\mathbb{R}^5$ の部分空間 (linear subspace)

$$\mathrm{span}\{L(e_1), L(e_2), L(e_3), L(e_4), L(e_5)\}$$

の次元 (dimension) を求めよ．

2: 微分積分

以下の広義積分（improper integral）が収束する（convergent）か発散する（divergent）かを判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^4}}{e^x}dx$

3: 代数学

正整数で定義された関数 f が以下の２つの条件：

(i) 正整数 m, n が互いに素（relatively prime）ならば，$f(mn) = f(m)f(n)$,

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $N > 0$ が存在して素数 p および正整数 a が $N < p^a$ ならば，$|f(p^a)| < \varepsilon$,

をみたせば,

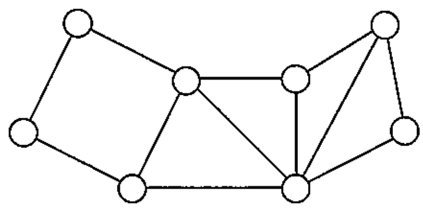
$$f(n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることを示せ.

4: グラフ理論

単純無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，E のどの辺の両端点も同色で彩色しないという条件で V の頂点を彩色する（各頂点に 1 つの色を割り当てる）ことを頂点彩色という．色数 χ に対して色の集合を $C=\{1,2,\ldots,\chi\}$ とし，彩色を $\pi: V\to C$ で表すと，π が頂点彩色であるための条件は $\pi(u)\neq\pi(v)\ (\forall\{u,v\}\in E)$ である．色数 χ の頂点彩色を χ 彩色と呼ぶ．以下の各問に答えよ．

(1) 次のグラフに対し，色数のできるだけ少ない頂点彩色を求めよ．



(2) 最大次数が 3 であり，3 彩色が存在しないような連結なグラフの例を 1 つ挙げよ．

(3) 最大次数が 2 であり，2 彩色が存在しないような連結なグラフの例として，頂点数 4 以上のものを 1 つ挙げよ．

(4) 任意のグラフ G に対し，その最大次数を Δ とするとき，G に対する $(\Delta+1)$ 彩色が存在することを示せ．

(5) 以下の各主張が正しいか否かを答えよ．また，正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．なお，閉路の長さは閉路に含まれる辺の数である．

(i) G に 2 彩色が存在するならば，G の任意の閉路の長さは偶数である．

(ii) G の任意の閉路の長さが偶数であるならば，G に 2 彩色が存在する．

ヒント．ある頂点を始点とする最短路木を利用する方法がある．

用語．グラフ: graph, 頂点: vertex, 辺: edge, 単純グラフ: simple graph (並列辺も自己ループも含まないグラフ), 並列辺: parallel edges (多重辺 (multiple edges) ともいう), 自己ループ: self-loop (ループ (loop) ともいう), 無向グラフ: undirected graph, 端点: end vertices, 頂点彩色: vertex coloring, 次数: degree, 最大次数: maximum degree, 連結: connected, 閉路: cycle, 最短路木: shortest path tree.

5: 数学基礎論

集合 $\{0,1\}$ 上の 2 種類の位相を考える．まず，$\{0,1\}$ に離散位相を与えた空間を $\mathbb{B}$ と書く．次に，台集合を $\{0,1\}$ とし，開集合が $\emptyset, \{1\}, \{0,1\}$ のみからなる位相空間を $\mathbb{S}$ と書く．$\mathbb{N}$ には離散位相を入れ，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ にはそれぞれ積位相が与えられているとする．

以下の各問に答えよ．

(1) 任意の連続関数 $g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{B}$ は定数関数であることを示せ．

(2) いま，$\varphi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ を次によって定義する．

$$\varphi(x)(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\exists m \in \mathbb{N})\ x(m) = n+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき，φ が連続かつ開な全射であることを示せ．

ここで，位相空間 X, Y に対して，写像 $\varphi\colon X \to Y$ が開であるとは，任意の開集合 $U \subseteq X$ の像 $\varphi[U]$ が開であることを意味する．

用語．位相: topology, 離散: discrete, 台集合: underlying set, 開: open, 積: product, 連続: continuous, 定数: constant, 全射: surjective, 像: image.

6: 量子力学

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$,（ただし，$t \geq 0$）とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) X が観測量 (observable) を表すことを示せ．

(2) 閉じた量子系 Q が時刻 $t = 0$ で状態 $|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ にあるとする．任意の $\tau \geq 0$ に対して，$U(\tau)$ は時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \tau \geq 0$ までの Q の時間発展 (time evolution) を表す行列とする．このとき，任意の時刻 $t = \tau \geq 0$ での系 Q の状態 $|\psi_\tau\rangle$ を成分で記述せよ．

(3) 任意の時刻 $t = \tau \geq 0$ に対して，期待値 (expectation value) $\langle X \rangle_\tau := \langle \psi_\tau | X | \psi_\tau \rangle$ を求めよ．

(4) 任意の時刻 $t = \tau \geq 0$ に対して，バリアンス (variance) $\sigma_\tau^2(X) := \langle X^2 \rangle_\tau - (\langle X \rangle_\tau)^2$ を求めよ．

(5) バリアンス $\sigma_\tau^2(X)$ が最小となる最初の時刻 $\tau^* \geq 0$ を求めよ．

7: アルゴリズム設計法

n 個の正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ と正整数 b に対して,

$$\sum_{i \in I} a_i = b \qquad (*)$$

を満たす $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ について考える．以下の各問に答えよ．

(1) $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 12, a_5 = 14, a_6 = 20, b = 28$ に対して, $(*)$ を満たす I は存在するか．また $b = 31$ の場合はどうか．それぞれ存在するならばそのような I を与えよ．存在しない場合，存在しないことを証明せよ．

(2) $(*)$ を満たす I が存在するかどうかを判定する (**determine**) アルゴリズムでできるだけ速いものを擬似コード (pseudocode) で与えよ（必ずしも入力サイズ (input size) に関する多項式時間アルゴリズム (polynomial-time algorithm) である必要はない）．またその時間計算量 (time complexity) を評価せよ．

(3) $(*)$ を満たす I がいくつあるかを数える (**count**) アルゴリズムでできるだけ速いものを擬似コードで与えよ（必ずしも入力サイズに関する多項式時間アルゴリズムである必要はない）．またその時間計算量を評価せよ．

令 和 4 年 度

名古屋大学 大学院 情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（オンライン筆記試験 第２科目）

令和３年８月５日

解答時間　１４：３０－１６：００
答案提出　１６：００－１６：１５

注意事項

1. 受験票の同封物：「令和４年度 数理情報学専攻８月入試（博士前期課程）について」および入試連絡票に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。

2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。

3. 日本語または英語で解答すること。

4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、グラフ理論、数学基礎論、量子力学、アルゴリズム設計法の７問である。このうち３問を選択して解答すること。選択した問題名を解答用紙の上部に記入すること。

5. 全ての解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

6. 問題ごとに異なる解答用紙を用いること。１枚の解答用紙に書ききれない場合は、２枚目の解答用紙を使用してもよい。２枚目を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

7. 解答用紙を提出する前に各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に 1/k, 2/k,⋯, k/k と番号をつけて提出すること。

8. 指定された方法で解答用紙を提出すること。

9. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに緊急連絡先：090-5617-0248（日本国外から：+81-90-5617-0248）へ連絡しその指示に従うこと。

1: 線形代数

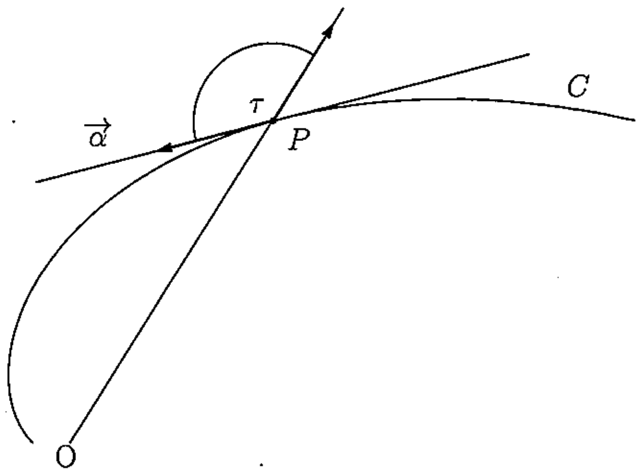
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき, 以下の各問に答えよ．

(1) A を対角化 (diagonalize) せよ．

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A^n \vec{a}}{||A^n \vec{a}||}$ を求めよ．ただし $||\vec{a}||$ は $\vec{a}$ の (標準的) ノルム (standard norm) を表す．

2: 微分積分

滑らかな曲線 C 上を動く動点 P がある．ただし，原点を O とし，$P \neq O$ とする．



上図では，動点 P は曲線上を右から左の方向へ動いていると仮定している．

以下の各問に答えよ．

(1) 直交座標系（orthogonal coordinate system）で P の座標が (x, y) のとき，P における大きさ 1 の接ベクトル（tangent vector， 以下 $\overrightarrow{\alpha}$ とする）を y' $(= \frac{dy}{dx})$ を用いて表せ．ただし，$-\infty < y' < +\infty$ と仮定する．

(2) 極座標系（polar coordinate system）で P の座標を (r, θ) とし，$\overrightarrow{\alpha}$ とベクトル $\overrightarrow{OP}$ のなす角を τ とする．このとき，$\overrightarrow{\alpha}$ を θ と τ を用いて表せ．

(3) $\sin\tau \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{\tan\tau} = \frac{\cos\theta + y'\sin\theta}{-\sin\theta + y'\cos\theta}$$

を示せ．

(4) P のまわりで r の陰関数（implicit function）が存在するとき，

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\tan\tau}$$

を示せ．
（ヒント：曲線の方程式を $F(x, y) = 0$ とし，$f(r, \theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ が定める r の陰関数を微分せよ.）

3: 代数学

正整数 n に対して，

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{x}{e^x - 1} \frac{e^{nx} - 1}{x}$$

を利用することにより非負整数 m に対して，

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

を示せ．ただし，B_k はべき級数展開（power series expansion）

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

の係数である．

4: グラフ理論

単純無向グラフ $G=(V,E)$ がサンドイッチグラフであるとは，ある二つの数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ とある頂点重み付け $w\colon V\to\mathbb{R}$ が存在し，任意の 2 頂点 $u,v\in V$ に対して，

$$\{u,v\}\in E \iff \alpha\le w(u)+w(v)\le\beta$$

であることをいう．このときの $\langle\alpha,\beta,w\rangle$ を，G のサンドイッチ表現という．下図左端は，あるグラフ H_1 に対するサンドイッチ表現の例である．

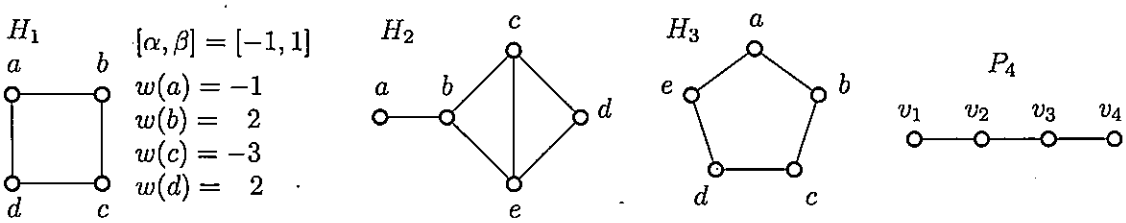
以下の各問に答えよ．

(1) $V=\{a,b,c,d,e\}$ とし，$w(a)=1$, $w(b)=2$, $w(c)=3$, $w(d)=4$, $w(e)=5$ とする．頂点集合 V とサンドイッチ表現 $\langle 5,7,w\rangle$ で表されるグラフを図で示せ．

(2) 下図の H_2 はサンドイッチグラフである．H_2 のサンドイッチ表現を一つ求めよ．

(3) 下図の H_3 がサンドイッチグラフではないことを証明せよ．
ヒント: w が最小値をとる頂点を任意に（例えば a に）決めても一般性を失わない．

(4) パス P_n を，頂点集合 $\{v_i \mid 1\le i\le n\}$ と辺集合 $\{\{v_i,v_{i+1}\}\mid 1\le i<n\}$ からなるグラフとする（下図右端は P_4）．このとき，任意の正整数 n に対し P_n がサンドイッチグラフであることを，サンドイッチ表現を与えることにより示せ．



用語．グラフ: graph, 頂点: vertex, 辺: edge, 単純グラフ: simple graph （並列辺も自己ループも含まないグラフ），並列辺: parallel edges（多重辺 (multiple edges) ともいう），自己ループ: self-loop（ループ (loop) ともいう），無向グラフ: undirected graph, パス: path.

5: 数学基礎論

集合 $\{0,1\}$ 上の2種類の位相を考える．まず，$\{0,1\}$ に離散位相を与えた空間を $\mathbb{B}$ と書く．次に，台集合を $\{0,1\}$ とし，開集合が $\emptyset, \{1\}, \{0,1\}$ のみからなる位相空間を $\mathbb{S}$ と書く．$\mathbb{N}$ には離散位相を入れ，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ にはそれぞれ積位相が与えられているとする．また，写像 $\varphi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ を次によって定義する．

$$\varphi(x)(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\exists m \in \mathbb{N})\, x(m) = n+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以下の問に答えるにあたって，次の2つの性質が成り立つことは自由に用いてよい．

- 任意の連続関数 $g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{B}$ は定数関数である．
- φ は連続かつ開な全射である．ここで，位相空間 X, Y に対して，写像 $\varphi\colon X \to Y$ が開であるとは，任意の開集合 $U \subseteq X$ の像 $\varphi[U]$ が開であることを意味する．

以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f\colon Z \to Y$, $g\colon X \to Y$, $h\colon Z \to X$ について，$f = g \circ h$ となっていると仮定する．$f\colon Z \to Y$ が連続であり，$h\colon Z \to X$ が連続かつ開な全射ならば，$g\colon X \to Y$ は連続であることを示せ．

(2) 関数 $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}$ が連続であり，$f = g \circ \varphi$ となる $g\colon \mathbb{S}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}$ が存在するならば，f は定数関数であることを示せ．

用語．位相: topology, 離散: discrete, 台集合: underlying set, 開: open, 積: product, 連続: continuous, 定数: constant, 全射: surjective, 像: image.

6: 量子力学

以下の各問に答えよ.

(1) $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，行列 e^{-itY}（ただし，$t \geq 0$）の成分表示を求めよ.

(2) 以下では $\mathbb{C}^2$ 上の単位ベクトルに対応する（純粋）量子状態 ((pure) quantum state) を，単に量子状態と呼ぶことにする.

(i) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ e^{i\theta}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ の形で与えられる任意の量子状態を，それに直交 (orthogonal) する量子状態に変化させるような時間発展 (time evolution) を表す行列（2 次元ユニタリ行列 (unitary matrix)）を一つ与えよ.

(ii) 任意の量子状態をそれに直交する量子状態に変化させるような時間発展を表す行列（2 次元ユニタリ行列）は存在するか？存在するならそのような時間発展を表す行列を一つ与え，存在しない場合はそのことを証明せよ.

7: アルゴリズム設計法

以下の各問に答えよ．

(1) 以下の O によるオーダー表記 (O-notation) を簡潔にせよ．

(i) $O(n^{1.999}(\log n)^{100} + 0.5n^2)$

(ii) $O((\log n)^{\log n} + 1000n)$

(2) 以下の各漸化式を満たす $T(n)$ を Θ によるオーダー表記 (Θ-notation) で表せ．正しさの説明もすること．

(i) $T(n) = T(n-1) + 10n$ $(n \geq 2)$, $T(1) = 1$.

(ii) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ $(n \geq 3)$, $T(2) = T(1) = 1$.

(iii) $T(n) = 2T(n/2) + cn$ $(n \geq 2)$, $T(1) = 1$ (ただし，c は適当な正定数, n は 2 の冪 (a power of 2) であるとしてよい).

(3) 次の式を証明せよ．

$$n! = 2^{\Theta(n \log n)}.$$

ただし，式 $f(n) = 2^{\Theta(g(n))}$ は，$f(n) = 2^{h(n)}$ と表したときに $h(n) = \Theta(g(n))$ であることを意味する．