令 和 2 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（専門）

令和２年２月１３日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．日本語または英語で解答すること。

５．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認すること。

６．問題１から問題３のうち２問を選択して解答すること。
なお、選択した問題番号を解答用紙の指定欄（科目名欄）に記入すること。
ただし、問題３は選択問題であり、問題はIとIIからなる。問題３を選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)

$\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(1) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が張る部分空間 W を $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ と書く. W の直交補空間（orthogonal complement） $W^{\perp}$ の基底を一つ求めよ.

(2) 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，次の $\mathbb{R}^4$ の元を考える:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4b+1 \\ 2b+2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2b+1 \\ 2b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = W$ を成り立たせる $b \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^4$ の通常基底（standard basis）における $W^{\perp}$ 上への直交射影（orthogonal projection）の表現行列（matrix representation）を求めよ.（**ヒント**：集合 $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ がある部分空間 Z の正規直交基底であるなら，Z 上への「直交射影」とは任意のベクトル $\mathbf{v}$ を $(\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{z}_1 + \cdots + (\mathbf{z}_k \cdot \mathbf{v})\mathbf{z}_k$ に移す写像である. ただし，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を表す.）

(4) (3) で求めた行列を対角化（diagonalization）する基底を一つ示せ.

問題 2.（微分積分）

以下の各問に答えよ．

(1) 次の小問 (i), (ii) に答えよ．

(i) 任意の $a \geq 0$ に対し，２つの領域を

$$R_1(a) = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

と

$$R_2(a) = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 2a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

と定める．このとき次の不等式が成立することを示せ．

$$\iint_{R_1(a)} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_0^a \int_0^a e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{R_2(a)} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

(ii) $I(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-x^2} dx$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を証明せよ．

(2) 関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を，任意の $y \in \mathbb{R}$ について，次の条件 $(*)$ を満たすものとする．

$(*)$ もし $f(x) = y$ となる $x \in [0,1]$ が存在するならば，$f(x) = y$ となる $x \in [0,1]$ がちょうど 2 つだけ存在する．

このとき，f はある点で不連続 (discontinuous) であることを示せ．

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である. 次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ. 解答用紙の科目名欄に, どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ.

I.

φ をオイラー (Euler) 関数とする. $\varphi(n) = 24$ をみたす正整数 n をすべて求めよ.

II.

各内点が高々2つの子を持つ根付き木を二分木と呼ぶ．二分木 T の各頂点 v に対し，根から v への路の長さ（枝数）を v の深さといい，これを $d_T(v)$ と記す．T が n 個の葉 $l_1, \ldots, l_n$ を持ち，各葉 l_i に重み w_i が与えられるとき，$w(T) = \sum_{i=1}^{n} w_i d_T(l_i)$ を二分木 T の重みと呼ぶ．与えられた n 個の重み $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ に対し，それらの重みを葉に持つ二分木の中で $w(T)$ が最小となるものを，W に対する最適二分木と呼ぶ．以下では重みは $0 < w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_n$ を満たすものとする．このとき以下の命題が成り立つ．

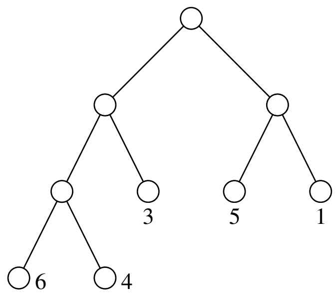
命題 A. 任意の W に対して以下の2条件を共に満たす最適二分木 T が存在する．

- (ア) 重み w_1 と w_2 を持つ葉 l_1 と l_2 が兄弟である．
- (イ) どの葉もその深さは葉 l_1 (と l_2) の深さ以下である ($\forall i \ge 3,\ d_T(l_i) \le d_T(l_1)$)．

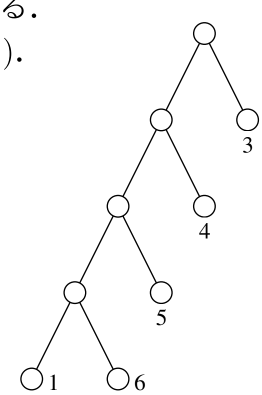
命題 B. W に対して T は命題 A の2条件を共に満たす最適二分木であるとする．重み w_1 と w_2 を持つ葉 l_1 と l_2 を T から消去し，新たに葉となったそれらの親が重み $w_1 + w_2$ を持つ二分木を T' と呼ぶ．このとき T' は $n-1$ 個の重み $W' = \{w_1+w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ (ただし $w_1 + w_2 \le w_3$ とは限らない) に対する最適二分木である．

以下の各問に答えよ．

(1) 以下はいずれも $W = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ に対する二分木である．
二分木 T_a と T_b の重みを答えよ (数字は葉の重みを表す)．



二分木 T_a



二分木 T_b

(2) $W = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ に対する最適二分木を求めよ（**ヒント.** 2つの命題を利用せよ）．

(3) 以下の主張が正しい場合は証明を，そうでない場合は反例を示せ．

主張. 任意の W に対して最適二分木はどの内点もちょうど2つの子を持つ．

(4) 命題 A を証明せよ．

(5) 命題 B の2つの二分木 T と T' の重み $w(T)$ と $w(T')$ が満たす関係を示せ．

(6) 命題 B を証明せよ（**ヒント.** $n-1$ 個の重み $W' = \{w_1 + w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ に対する最適二分木のひとつ T^* を考え，T^* において重み $w_1 + w_2$ を持つ葉に注目せよ）．

用語. 内点: inner vertex, 子: child, 根付き木: rooted tree, 二分木: binary tree, 頂点: vertex, 根: root, 路: path, 枝: edge, 深さ: depth, 葉: leaf, 重み: weight, 兄弟: siblings.