[別紙1] 渡航の成果の詳細

木原 貴行 (情報学研究科 数理情報学専攻 講師)

渡航の目的と概要

2018年10月1日〜2019年3月16日，シンガポール南洋理工大学・物理数理科学研究科・数理科学専攻に滞在し，計算可能性の位相的分析に関する基礎理論の構築に取り組んだ.

計算概念に対して位相空間論的解釈を与えるのは，領域理論などをはじめとする理論計算機科学における基礎的手法のひとつである．本研究は粗なデータに基づく計算可能性の数学的基礎の構築が最大の目的であるが，特に負データや連続情報の近似データに基づく計算可能性の解析に取り組んだ.

近年，記号力学系（特に極小サブシフト）や群の語の問題の研究において，負データに基づく枚挙の概念が重要な役割を担うことが指摘されている．この負データに基づく計算は，近年，実連続関数を入出力とする計算などとも関連することが判明している.

負データに基づく計算は，位相空間論的には，補有限位相の下での計算と解釈でき，これは典型的な非ハウスドルフ的な T_1-空間である．一方で，この種の空間は sober ではないため，領域理論や point-free 位相空間論によって直接的に取り扱うのは難しい.

本研究では，負データに基づく計算の位相的解析の数学的基礎付けを行うと共に，関連する分野の具体的問題への応用を構築することを目的とする．以下において，本渡航の成果の詳細を記す.

(a) 計算的枚挙の構造の位相的統一理論の構築

計算可能性理論において，枚挙の概念は重要な役割を担う．位相的分離公理などの各種の位相的性質が計算的枚挙の概念とどう本質的に関わるかを解明することを目的として，位相的手法に基づく枚挙の構造の解析理論を構築した.

結果として，枚挙次数の理論の先行研究の多くは位相的観点から統一的に解釈できることを明らかにした．したがって，本研究は，半世紀以上に渡る枚挙次数の理論のほとんどを包含する統一理論を与える．また，この統一理論から得られる無数の帰結のひとつとして，負データから正データの枚挙による計算的復元可能性という性質が，位相空間論における G_δ-空間の概念と対応することなどが明らかになる.

（これは，本渡航以前から開始していた共同研究であるが，滞在中に研究を更に進展させ，完成に導いた）

(b) 負データに基づく高階計算の理論の構築

負データに基づく計算の重要性は，概要において述べた通りである．これを高階プログラミングにおいて取り扱う際，負データに基づく高階関数空間上の計算構造の分析が必要になる．これは位相的には補有限位相を基礎型とする高階関数空間上の計算と解釈できる.

本研究では，この種の空間を基礎型とする高階関数空間たちの計算構造に対する様々な分離手法を構築した．高階関数空間は一般には可算基を持たないため，計算論の展開は容易ではない．しかし，一般位相空間論において Arhangel'skii によって導入されたネットワークの概念の変種である収束列ネットワークを利用することによって問題は解消できることが知られている.

報告者の先行研究においては，正データと負データの対応を位相空間論における de Groot 双対の一

種として解釈できることを示していた．本研究では，その観点を洗練させつつ，次数の理論的手法と記述集合論的手法を交えることによって，様々な高階空間的性質の分離手法を与えた．特に，記述集合論的な記述複雑性解析が強力な手法となることを明らかにした．

(c) トポロジーの基礎の公理的分析に関する未解決問題の解決

「逆数学」は，数学の定理を証明するのに必要最小限の公理を探る分野である．計算概念あるいは構成可能性概念に基づく基礎公理からの定理の証明可能性の分析は，数学的定理から計算的成分を抽出するのに有用である．

近年，J. Stillwell は代数トポロジーにおけるブラウワーの不変性定理の公理的分析を「逆数学における最も興味深い未解決問題」として提示した．ブラウワーの不変性定理は，たとえば位相多様体論などで基礎的な役割を担うため，その逆数学的分析は位相多様体の計算論的取り扱いのために重要となることが予期される．

本研究では，この Stillwell の「最も興味深い未解決問題」に解決を与えた．具体的には，順方向としてはアレクサンダー双対などのホモロジー/コホモロジー論における基本的な定理が弱ケーニヒの補題から形式的に証明可能であることを確認した．逆方向については，ノー・レトラクション定理の否定下では，任意のポーランド空間から低次元球面への absolute extensor を構成できることを明らかにし，そこから埋め込み定理によって低次元ユークリッド空間へポーランド空間を埋め込むことによって，次元不変性定理の証明には弱ケーニヒの補題が必須であることを証明した．

(d) 非可分空間のボレル可測関数の構造に対する組合せ論的完全不変量の発見

整数列の空間上のボレル可測関数の位相的解析に関しては，数年前に，報告者らの先行研究によって，BQO 理論を用いた組合せ論的完全不変量が与えられていた．この空間は可分空間であるが，非可分空間上のボレル可測関数の構造に関して既知の性質はほとんど知られていなかった．

これに対し，本研究では，非可分超距離化可能空間上のボレル可測関数の連続還元構造に対して，「非可算基数上の計算論」を応用することによって，その組合せ論的完全不変量を与えた．

抽象的なレベルにおいては，任意順序数上の計算論の概念が導入可能であることは，1960 年に竹内外史によってゲーデルの構成可能宇宙の研究において導入されて以降，古くから知られていた．しかし，特に非可算順序数上の計算論については，純粋な集合論対象を除いては具体的応用は見つかっていなかったように思える．したがって，本研究成果は，非可算基数上の計算論の，おそらく歴史上最初の具体的応用例を与えるものでもあると思われる．

また，本研究の組合せ論的完全不変量は BQO 理論と深く結び付くものである．BQO 理論の前身である WQO 理論は，プログラム検証や計算機代数などにおいてプログラムの停止性解析など重要な役割を担うものである．WQO 理論の正統な拡張として称される BQO 理論を用いてボレル可測関数の完全不変量を与えたことによって，本研究は，ボレル可測関数の計算論的理解を完全な意味で与えたこととなる．

成果となる論文

以下，上記の成果 (a), (b), (c), (d) に対応する論文である．(c) に関する論文は既に純粋数学のジャーナルに投稿済みである．(a) に関する論文はほぼ完成しているため，近日中に純粋数学のジャーナルに投稿予定である．(b),(d) に関する論文は現在，準備

中である.（準備中論文については，論文タイトルの変更の可能性有り）

(a) Takayuki Kihara, Keng Meng Ng, and Arno Pauly, "*Enumeration degrees and non-metrizable topology*", preprint (103 pages).

(b) Takayuki Kihara and Keng Meng Ng, "*Higher order computability with negative information*", in preparation (39 pages).

(c) Takayuki Kihara, "*The Brouwer invariance theorems in reverse mathematics*", submitted (14 pages).

(d) Takayuki Kihara, "*Wadge degrees on non-separable spaces and computability on uncountable cardinals*", in preparation.

成果の発表

- Takayuki Kihara, "*BQO-Wadge theory on ultrametric spaces*", NUS Logic Seminar, National University of Singapore, Oct. 31, 2018.
- Takayuki Kihara, "*Degrees of non-computability of points in general spaces*", CCR 2018, Thirteenth International Conference on Computability, Complexity and Randomness, Santiago, Chile, Dec. 17–21, 2018.