平 成 ３１ 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（専門）

平成３０年８月８日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、語学辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．外国人留学生は、英語での解答を可とする。

５．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

６．問題は線形代数、微分積分、離散数学、グラフ理論、数学基礎論、量子力学、アルゴリズム設計法の７科目がある。このうち３科目を選択して解答すること。なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。ただし、数学基礎論は選択問題であり、問題はIとIIからなる。数学基礎論を選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1．(線形代数学)
以下の各問に答えよ．

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値 λ (eigenvalue)，およびそれに対応する固有空間 W_λ (eigenspace) を求めよ．さらに，A が対角化可能ならば，対角化 (diagonalization) せよ．

(2) 上で求めた固有値 λ に対して，

$$U_\lambda = \{\vec{x} \mid (A - \lambda E)^2 \vec{x} = \vec{0}\}$$

とする．ただし，E は 3 次単位行列 (identity matrix) である．

(i) 各 λ に対して，U_λ を求めよ．

(ii) 各 U_λ から任意に基底 (basis) を選ぶと，それらを並べてできる行列は正則 (regular, invertible) であることを証明せよ．

問題 2. (微分積分学)
以下の各問に答えよ.

(1) 曲面

$$z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$$

上の点の中で点 $(0, 1, 0)$ からの距離 (distance) が最小 (minimum) となるものを求めよ.

(2) 不定積分 (indefinite integral)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

を求めよ.

問題 3. (離散数学)
以下の各問に答えよ．

(1) 2 元体 $\mathbb{F}_2$ 上既約（irreducible）な 2 次多項式（polynomial）をすべて求めよ．

(2) 次の各多項式に対して，すべての解を含む $\mathbb{F}_2$ の最小の拡大体（extension field）を求めよ．ただし，拡大体は $\mathbb{F}_2$ を含む代数的閉体（algebraically closed field）を一つ固定し，その中で考えるものとする．

   (i) $x^5 + x^4 + 1$

   (ii) $x^5 + x^3 + 1$

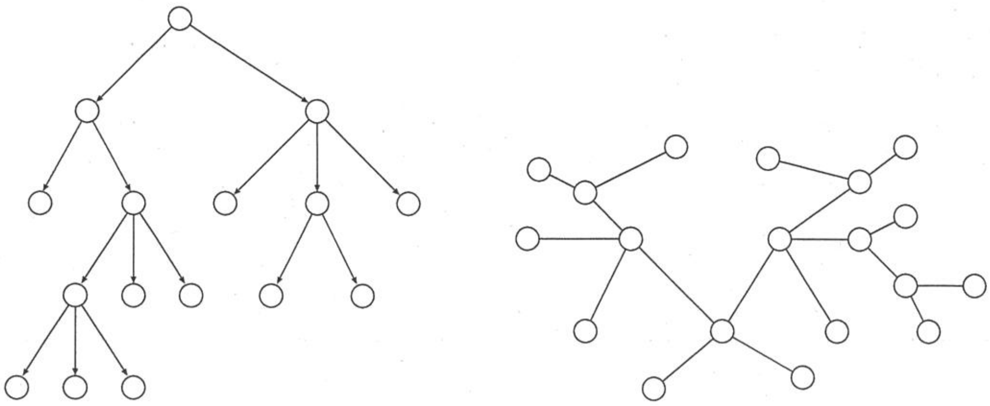
   (iii) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$

(3) 上の多項式の解の中で，乗法位数（multiplicative order）の最大値を求めよ．

問題 4. (グラフ理論)

根付き木においては子を持たない頂点（すなわち出次数 0 の頂点）を葉と呼び，木においては次数 1 の頂点を葉と呼ぶ．また，葉以外の頂点を内点と呼ぶ．以下の各問に答えよ．

(1) 次の図の根付き木（左側）と木（右側）のそれぞれに対して，内点の数と葉の数を答えよ．



(2) 頂点数が 2 以上である根付き木に関して以下の各問に答えよ．

(i) 主張 1: 全ての子が葉であるような内点が存在する．
主張 1 が正しいか否かを答えよ．正しい場合は理由を説明し，そうでない場合は反例を示せ．

(ii) どの内点もちょうど 3 つの子を持つ根付き木において，内点の数を k，葉の数を l とするとき，l と k の関係を示せ (l を k の関数として表せ)．また，その関係が成り立つ理由も述べよ．

(iii) どの内点も子の数が 2 つまたは 3 つであるような根付き木において，2 つの子を持つ内点の数を r，3 つの子を持つ内点の数を k，葉の数を l とするとき，これらの関係を示せ (l を r と k の関数として表せ)．また，その関係が成り立つ理由も述べよ．

(3) 頂点数が 3 以上である木のどの内点も次数がちょうど 4 であるとき，内点の数 k と葉の数 l の関係を示せ．また，その関係が成り立つ理由も述べよ．

用語．木: tree, 根付き木: rooted tree, 次数: degree, 出次数: out degree, 頂点: vertex, 葉: leaf, 内点: inner vertex

問題 5. (数学基礎論)

数学基礎論は選択問題である. 次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ. 解答用紙の指定欄に, どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ.

I.

κ を非可算正則基数 (uncountable regular cardinal) とする. κ の部分集合 (subset) X が club であるとは以下の性質をみたすこととする.

(i) $\bigcup X = \kappa$

(ii) $\forall \alpha < \kappa (\bigcup (\alpha \cap X) = \alpha \to \alpha \in X)$

このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) κ より小さい基数 δ に対し, κ の club な部分集合の δ 個の共通部分 (intersection) も club となっていることを証明せよ.

(2) $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を κ 個の club な部分集合の列とする. このとき次の集合 D も κ の club な部分集合となっていることを証明せよ.

$$D = \{\beta < \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} X_\alpha\}$$

(II は次のページにある.)

II.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を非負整数 (non-negative integers) 全体の集合とする.

- 有理数列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が計算可能 (computable) であるとは，次の条件を満たす計算可能関数 $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ が存在することを意味する.

$$f(n) = (0, s, t) \iff q_n = \frac{s}{t}$$
$$f(n) = (1, s, t) \iff q_n = -\frac{s}{t}$$

- 実数 x が下半計算可能 (lower semicomputable) とは，ある計算可能な有理数列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$x = \sup\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ となることを意味する.

- 実数 x が上半計算可能 (upper semicomputable) とは，ある計算可能な有理数列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$x = \inf\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ となることを意味する.

以下の問 (1)–(5) に答えよ.

(1) 実数 x が下半計算可能ならば $-x$ は上半計算可能であることを示せ.

(2) 実数 x, y が共に上半計算可能ならば和 $x + y$ も上半計算可能であることを示せ.

(3) 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対して，ρ_A を次によって定義される実数とする.

$$\rho_A = \sum_{n\in A} 2^{-n}.$$

集合 A が再帰的可算 (recursively enumerable) ならば，実数 ρ_A は下半計算可能であることを示せ. ここで，空でない集合 A が再帰的可算であるとは，ある計算可能関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ となることを意味する.

(4) 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対して，実数 ρ_A が上半計算可能かつ下半計算可能ならば，A は計算可能であることを示せ. ここで，A と $\mathbb{N} \setminus A$ は共に無限集合 (infinite set) であることを仮定してよい.

(5) 実数 x, y が共に上半計算可能であっても，差 $x - y$ が上半計算可能とは限らないことを示せ. ここで，再帰的可算だが計算可能でない集合の存在を仮定してよい.

問題 6. (量子力学)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$，状態ベクトル $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ ib \end{pmatrix}$, $|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ id \end{pmatrix}$ とする．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 (imaginary unit)，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$，$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ とする．
以下の各問に答えよ．

(1) A が観測量 (observable) を表すことを示せ．

(2) A の固有値 (eigenvalue) と固有状態 (eigenstate) を与えよ．

(3) 期待値 (expectation value) $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$ が 0 になる a, b を求めよ．

(4) バリアンス (variance) $\sigma(A)_\psi^2 = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$ が 0 になる a, b を求めよ．

(5) $c \neq 0$, $d \neq 0$ ならば，$|\Phi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\varphi'\rangle$ を満たす状態ベクトル $|\varphi\rangle, |\varphi'\rangle \in \mathbb{C}^2$ が存在しないことを示せ．

問題 7. (アルゴリズム設計)

行列 (matrix) の掛け算を実行する際，通常，複数の数同士の掛け算・足し算 (これらを**基本演算 (basic operations)** と呼ぶ) を行う．例えば，$m_1 \times m_2$ 行列 A_1 と $m_2 \times m_3$ 行列 A_2 の掛け算 A_1A_2 を素直に実行[1]するとすると，一つの要素を計算するのに $\boxed{(ア)}$ 回の掛け算と $\boxed{(イ)}$ 回の足し算を行うこととなる．行列 A_1A_2 の要素は $\boxed{(ウ)}$ 個あるので，行列の積 A_1A_2 を $\boxed{(エ)}$ 回の基本演算で計算できることとなる．以下，この $\boxed{(エ)}$ を $f(m_1, m_2, m_3)$ と表す．

さて，複数の行列の積を計算することを考える．行列 A_i は $m_i \times m_{i+1}$ 行列であるとして，行列積 $A_1A_2A_3$ を計算するとき

$$(A_1A_2)A_3 \tag{1}$$

の順で計算するのと

$$A_1(A_2A_3) \tag{2}$$

の順で計算するのとでは，一般には基本演算の回数が異なる．以下では，行列積を計算する際の基本演算数を最小にする掛け算の順を最適な順序と呼ぶ．

今，$A_iA_{i+1}\cdots A_j$ を最適な順序で計算する際の基本演算回数を $g(i,j)$ とする．以下では，$m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ が与えられたとき，$A_1 \cdots A_n$ を計算するための最小の基本演算数 $g(1,n)$ と，これを実現する計算順序をいかに求めるかについて考える．

(1) 上の文の $\boxed{(ア)}$ から $\boxed{(エ)}$ に入る適当な式を答えよ．

(2) $A_1A_2A_3$ の計算をする際，式 (2) の順が式 (1) の順よりも基本演算数が小さくなるための必要十分条件を求めよ．

(3) $A_1 \cdots A_n$ を次の順で計算することを考える：まず $B := A_1 \cdots A_k$ と $C := A_{k+1} \cdots A_n$ をそれぞれ最適な順序で計算した上で，最後に BC の計算をする．この順で実行される基本演算の回数を関数 g と f を用いて表せ．

(4) 定義より $g(i,i) = 0$ である．(3) を踏まえた上で，$g(i,j)$ の再帰式 (recurrence formula) を与えよ (min, max などを使って良い)．

(5) (4) で得た再帰式に基づき，以下の順で各 $g(i,j)$ を計算するとする．

- $g(1,1) = g(2,2) = \cdots = g(n,n) = 0$,
- $g(1,2), g(2,3), \cdots, g(n-1,n)$,

  $\vdots$
- $g(1,n-1), g(2,n)$,
- $g(1,n)$.

$g(i,j)$ を計算する際に，それ以前の $g(*,*)$ は計算済みで，かつその値を定数時間で参照可能，さらに f の値も定数時間で計算できるとする．$g(i,j)$ を計算するための計算時間 (計算手間, computational time) をオーダー表記 (order notation) で答えよ．

(6) $g(1,n)$ を計算するための計算時間をオーダー表記で答えよ．

---

[1] $m_1 \times m_2$ 行列 $A_1 = [a_{ij}]$ と $m_2 \times m_3$ 行列 $A_2 = [b_{ij}]$ の積を計算するのに，行列積 A_1A_2 の p 行・q 列成分を $a_{p1}b_{1q} + \cdots + a_{pm_2}b_{m_2q}$ と一つずつ積を取り最後に和を取る形で計算