平 成 ３ ０ 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入　学　試　験　問　題

専　　　　　門

平成２９年８月３日（木）
１２：３０〜１５：３０

注　意　事　項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、日本語から母語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

４．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

５．問題は、線形代数、微分積分、離散数学、グラフ理論、数学基礎論、量子力学、アルゴリズム設計法の７科目である。このうち３科目を選択して解答すること。なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。ただし、数学基礎論は選択問題であり、問題はIとIIからなる。数学基礎論を選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ。

６．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

８．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出すること。

９．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 実 2 次正則行列 (real regular matrix of degree 2) P が存在して, $P^{-1}AP = B$ が成り立つという. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) A, B は同じ固有多項式 (characteristic polynomial) をもつことを示せ.

(2) a, b の値を求めよ.

(3) 条件を満たす P を 1 つ求めよ.

問題 2. (微分積分)

以下の各問に答えよ.

70 (1) $f(x) = \dfrac{(\log x)^3}{x}$ (ただし, $\log = \log_e$) を考える.

(i) $f(x)$ の増減・極値・グラフの凹凸および変曲点 (inflection point) を調べてグラフを書け.

(ii) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |f(x)|dx$ を求めよ.

30 (2) 次の関数の $x = 0$ における連続性 (continuity) と微分可能性 (differentiability) を調べよ.

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問題 3. (離散数学)

以下の各問に答えよ.

(1) f を非負の整数で定義される関数とする. 非負の整数 n に対して関数 g を

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$$

と定める. このとき,

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g(k)$$

が成立することを示せ.

(2) μ を Möbius 関数とする. すなわち, 正の整数 n に対して,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ (-1)^k & (n \text{ is a product of } k \text{ distinct prime numbers}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とする.

(i) 正の整数 n に対して,

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \geqslant 2) \end{cases}$$

が成立することを示せ. ただし, d は n のすべての正の約数を動くものとする.

(ii) f を正の整数で定義される関数とする. 正の整数 n に対して関数 g を

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$$

と定める. このとき,

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

が成立することを示せ.

問題 4. (グラフ理論)

頂点 (vertex) 集合 V, 辺 (edge) 集合 E をもつ無向グラフ (undirected graph) $G = (V, E)$ を考える.

- G を平面上に辺が交差することなく描画できるとき (non-crossing drawing exists), そのように描画したものを平面グラフ (plane graph) と呼び，辺によって分割された領域のそれぞれを面 (face) と呼ぶ．平面グラフの外側の領域も面の一つである (外面 (outer face))．例えば図 1 は平面グラフであり f_1 から f_5 までの面がある.

- 頂点の列 $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1})$ が $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $v_{k+1} = v_1$ であるとき，このような列のことを閉路 (cycle) という．図 1 の (v_1, v_2, v_3, v_1) は閉路である.

- 木 (tree) とは閉路のない連結 (connected) グラフのことをいう．例えば，図 2 は木である．木は平面グラフでもある.

- n 頂点完全 (complete) グラフ K_n とは, $|V| = n$, $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ を満たすようなグラフのことをいう. 例えば図 3 のグラフは K_5 である.

以上を踏まえた上で，以下の各問に答えよ.

(1) 図 1, 図 2 のグラフのそれぞれの頂点数，辺数，面数を答えよ.

(2) 平面グラフにおいて，一つの面は一つの閉路と (一対一) 対応するか．する場合，証明を与えよ．しない場合，そのような例を一つあげよ.

(3) 連結な平面グラフにおいてはオイラーの公式 (Euler's formula) $|V| - |E| + f = 2$ が成立する．ただし，f は面数である．これを利用し，平面グラフにおいては, $|E| \leqslant 3|V| - 6$ が成立することを示せ. (ヒント：どの面も 3 本以上の辺に囲まれている)

(4) K_n $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ は平面グラフであるかどうかを, 根拠と共に述べよ.

(5) (3) で取り上げたオイラーの公式 $|V| - |E| + f = 2$ を証明せよ．必要ならば，木においては $|E| = |V| - 1$ が成立することを用いて良い.

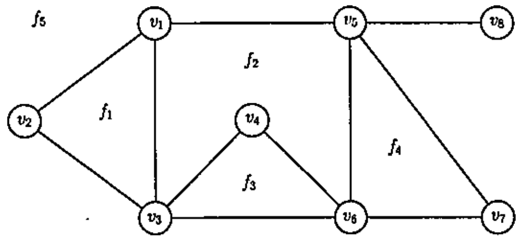

図 1: 平面グラフの例

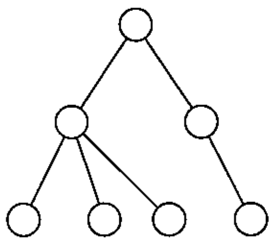

図 2: 木の例

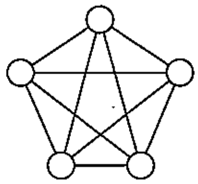

図 3: K_5

問題 5. (数学基礎論)

数学基礎論は選択問題である. 次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ. 解答用紙の指定欄に, どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ.

I.

以下の各問に答えよ.

(1) $\mathbf{R}$ の閉部分集合 (closed subset) 全部の集合は連続濃度 (cardinality of the continuum) をもつことを示せ.

(2) $(X, <_X)$ が整列集合 (well-ordered set) であるとは, $(X, <_X)$ が全順序集合 (totally ordered set) であって, かつ X のどの空でない部分集合も $<_X$ に関する最小元をもつときにいう. また, 二つの全順序集合 $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$ に対し, $f : X \to Y$ が順序保存写像 (order preserving map) であるとは, X の任意の要素 a, b について $a <_X b$ ならば $f(a) <_Y f(b)$ が成り立つときにいう.

$(X, <_X)$ が整列集合で, $f : X \to X$ が順序保存写像ならば, X の任意の要素 x について $x \leqslant_X f(x)$ (つまり $x <_X f(x)$ または $x = f(x)$) であることを示せ.

(II は次のページにある.)

II.

$\mathbb{N}$ を非負整数 (non-negative integers) 全体の集合とする．**原始再帰関数** (primitive recursive function) とは，以下のように帰納的に定義されるものである．

- (初期関数; initial functions) 後続関数 $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 零関数 $\mathrm{zero}^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ および射影関数 $\mathrm{proj}_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ は原始再帰関数である．

$$\mathrm{succ}(x) = x + 1, \quad \mathrm{zero}^k(x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad \mathrm{proj}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

  ここで，$k, n, i \in \mathbb{N}$ で $1 \leqslant i \leqslant n$ なるものとする．特に，0 変数関数（定数）$\mathrm{zero}^0() = 0$ の使用も認める．

- (合成; composition) $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ と $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が原始再帰関数ならば，以下のように定義される関数 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ もまた原始再帰関数である．

$$f(\boldsymbol{x}) = h(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})).$$

- (原始再帰; primitive recursion) $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ と $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ が原始再帰関数ならば，以下のように定義される関数 $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ もまた原始再帰関数である．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}), \\ f(\boldsymbol{x}, y+1) = h(\boldsymbol{x}, y, f(\boldsymbol{x}, y)). \end{cases}$$

この原始再帰関数に関する以下の各問に答えよ．

(1) 加法 (addition) を表す次の関数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は原始再帰的であることを示せ．

$$f(x, y) = x + y.$$

(2) 乗法 (multiplication) を表す次の関数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は原始再帰的であることを示せ．

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

(3) $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ が原始再帰的ならば，次の関数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ も原始再帰的であることを示せ．

$$f(x, y) = \prod_{z=0}^{y-1} p(x, z).$$

(4) $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ が原始再帰的ならば，次の関数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ も原始再帰的であることを示せ．

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\forall z < y)\ p(x, z) = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問題 6. (量子力学)

$A = \begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 (imaginary unit)，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする．以下の問 (1)–(7) に答えよ．

(1) A が観測量 (observable) を表すことを示せ．

(2) X, Y, Z の固有値 (eigenvalue) と固有状態 (eigenstate) を与えよ．

(3) 期待値 $x_i = \langle \psi_i^X | \, A \, | \psi_i^X \rangle$, $y_i = \langle \psi_i^Y | \, A \, | \psi_i^Y \rangle$, $z_i = \langle \psi_i^Z | \, A \, | \psi_i^Z \rangle$ $(i = 1, 2)$ を求めよ．ただし，$|\psi_1^X\rangle, |\psi_2^X\rangle$ は X の固有状態，$|\psi_1^Y\rangle, |\psi_2^Y\rangle$ は Y の固有状態，$|\psi_1^Z\rangle, |\psi_2^Z\rangle$ は Z の固有状態を表すものとする．

(4) x_1, y_1, z_1, z_2 を用いて，行列 A を表せ．

(5) 状態が $|\psi\rangle$ であるときの観測量 A のバリアンス (variance) は，$\sigma(A)^2 = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2$ と定義される．このとき，$|\psi_1^Y\rangle$ における $\sigma(A)^2$ を τ とする．τ を求めよ．

(6) $\tau = 0$ と $A = aI + cY$ は同値であることを示せ．

(7) $\tau = 0$ の直感的な解釈を説明せよ．

問題 7. (アルゴリズム設計法)

以下の各問に答えよ.

(1) 以下の各オーダー表記 (order notation) をできるかぎり簡潔にせよ.

(i) $O(n^3 + n\sqrt{n})$

(ii) $O(n \log n + n^2) + O(n^{1.83} \log n)$

(iii) $O(n^{\log n} + n^{100} + n^{30} \log n)$

(2) 以下の式が正しいことを示せ.

$$\log n! = \Theta(n \log n)$$

(3) 以下の各漸化式で表される $T(n)$ をオーダー表記で表せ.

(i) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2T(n-1) + 1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(n) = 3T(\lfloor n/3 \rfloor) + n \end{cases}$

(4) n 個の整数 (integers) からなる配列 (array) $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が与えられ, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ および $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ が成り立っているとする. A と B をあわせた $2n$ 個の数字の中で k 番目 $(1 \leqslant k \leqslant 2n)$ に小さい数字 (kth smallest number) を計算するアルゴリズムでできるだけ効率のよいものを設計し, その計算量 (時間量 (time complexity) と領域量 (space complexity) の両方) を評価せよ. なお, 領域量の評価には, 入力データを格納するための領域を含めなくてよい.