令 和 ８年 度

名古屋大学 大学院 情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（オンライン筆記試験）

令和７年８月６日

解答時間　１２：３０－１４：００
答案提出　１４：００－１４：１５

注意事項

1. 事前送付物：「令和８年度 名古屋大学 大学院情報学研究科 数理情報学専攻 博士前期課程７・８月実施入学試験 実施要領」および「入試連絡票」に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。
2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。
3. 日本語または英語で解答すること。
4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、数学基礎論、量子力学、離散最適化の６問である。このうち2問を選択して解答すること。選択した問題名を解答用紙の上部に記入すること。
5. 解答用紙は片面のみを使用し、裏面には何も書き込まないこと。
6. 全ての解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。
7. 問題毎に異なる解答用紙を用いること。１枚の解答用紙に書ききれない場合は、２枚目の解答用紙を使用してもよい。２枚目を使用した場合は、１枚目の解答用紙表面右下に「２枚目使用」と明記すること。一つの問題に３枚以上の解答用紙を使用することは認めない。３枚目以降は提出されても採点しない。
8. 解答用紙を提出する前に各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に 1/k, 2/k,⋯, k/k と番号をつけて提出すること。
9. 指定された方法で解答用紙を提出すること。
10. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに緊急連絡先[redacted]（日本国外から：+81-[redacted]）へ連絡しその指示に従うこと。

1: 線形代数

実数（じっすう） (real number) a, b, c に対して，

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とする．また $W = M_{1,2,3}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) $M_{a,b,c}$ の固有値（こゆうち） (eigenvalue) と対応する固有空間（こゆうくうかん） (eigenspace) を求めよ．

(2) W の逆行列（ぎゃくぎょうれつ） (inverse matrix) を求めよ．

(3) 対角成分（たいかくせいぶん） (diagonal elements) がすべて 0 であるような $k \times k$ 上三角行列（うえさんかくぎょうれつ） (upper-triangle matrix) B は，$B^k = O$ をみたすことを証明せよ．

(4) W の n 乗（じょう） (nth power) W^n を求めよ．

(5) 正則（せいそく） (regular) な $k \times k$ 上三角行列の逆行列は，上三角行列であることを証明せよ．

2: 微分積分

以下の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ の値を求めよ.

(2) 数列 (sequence) $\{a_n\}$ が a に収束する (converge) とき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

を求めよ.

(3) $f(x,y,z) = x^3 + xyz + z^3$ のとき，$f(x,y,z) = 0$ 上の点 $(1,0,-1)$ の近くでは z は x と y の関数として表すことができるか否かを判定し，表すことができるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(4) 定積分 (definite integral) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ の値を求めよ.

3: 代数学

以下の各問に答えよ．

互いに素な正整数 (coprime positive integers) $m,\ n$ に対して，以下の各等式を証明せよ．ただし，各和は n のすべての正の約数 (positive divisor) d をわたるものとする．

(1)

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

ただし，φ は Euler 関数 (Euler's totient function) である．

(2)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

ただし， μ は Möbius 関数 (Möbius function) である．

(3)

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

4: 数学基礎論

実数 (real number) 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．実関数 (real function) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する関係 (relation) $f \preceq g$ を以下のように定義する．

$$f \preceq g \iff \text{ある連続 (continuous) 関数 } t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ が存在して } f = g \circ t \text{ が成立する．}$$

ここで，$\mathbb{R}$ には標準的な位相 (standard topology) が入っているとする．また，$f \prec g$ であるとは，$f \preceq g$ であるが $g \preceq f$ でないこととする．実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $h_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下によって定義する．

$$h_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq a, \\ 0 & \text{if } x < a. \end{cases}$$

以下の各問に答えよ．

(1) 任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$h_a \preceq h_b$ であることを示せ．

(2) 任意の実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して，$b < c$ ならば $h_a \preceq h_b - h_c$ であることを示せ．
ここで，関数 $h_b - h_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(h_b - h_c)(x) = h_b(x) - h_c(x)$ によって定義される．

(3) $h_0 \preceq 1 - h_0$ は成立するかどうかを答えよ．
ここで，関数 $1 - h_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(1 - h_0)(x) = 1 - h_0(x)$ によって定義される．

(4) 任意の実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して，$b < c$ ならば $h_a \prec h_b - h_c$ であることを示せ．

(5) $h_0 - h_1 \prec f$ となる 2 値関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の例を挙げよ．

5: 量子力学

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．$i := \sqrt{-1}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 任意の量子状態 (quantum state)$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\langle\psi|A|\psi\rangle$ が実数 (real number) となるための $n \times n$ 複素正方行列 (complex square matrix)A の条件を述べよ．

(2) 指数行列 (exponential matrix) $e^{-i\omega t X}$ を計算し，その成分表示を求めよ ($t, \omega \in \mathbb{R}$).

(3)

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を時刻 (time) $t = 0$ における系の状態とする．

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t X}|\psi\rangle$$

を時刻 $t > 0$ における系の状態とする．時刻 t における期待値 (expectation value)

$$\langle Z\rangle_{\psi(t)} := \langle\psi(t)|Z|\psi(t)\rangle$$

および分散 (variance)

$$V_{\psi(t)}(Z) := \langle Z^2\rangle_{\psi(t)} - \langle Z\rangle^2_{\psi(t)}$$

を求めよ．

(4) $a, b \in \mathbb{C}$ に対し，二体 (bipartite) 量子状態 $|\Phi(a,b)\rangle =$

$$a|0\rangle \otimes |0\rangle + b|0\rangle \otimes |1\rangle + a|1\rangle \otimes |0\rangle$$

を考える．これがエンタングル状態 (entangled state) であるための a, b の必要十分条件 (necessary and sufficient conditions) を答えよ．

(5) 期待値 $\langle X \otimes X\rangle_{\Phi(a,b)} := \langle\Phi(a,b)|X \otimes X|\Phi(a,b)\rangle$ を求めよ．さらに，$|\Phi(a,b)\rangle$ が積状態 (product state) のときの $\langle X \otimes X\rangle_{\Phi(a,b)}$ の値を答えよ．

6: 離散最適化

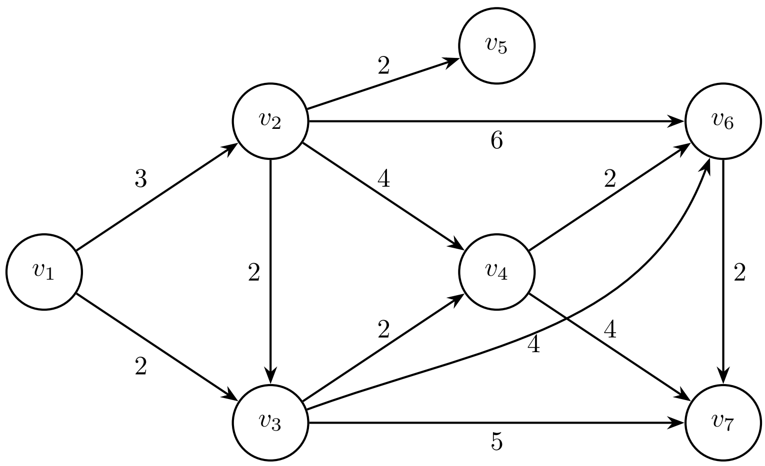
(1) 以下のオーダー表記(ひょうき) (order notation) をできるだけ簡潔(かんけつ)にせよ (simplify)(答えだけ述べればよい).

(i) $O(100n^n + 2^{n^2})$

(ii) $O(1000\,(\sum_{i=1}^{\infty}(0.1)^i)^n + 3n^2)$

(iii) $O(\sqrt{\log n}^{\log n} + n^2)$

(2) 頂点集合(ちょうてんしゅうごう) (vertex set) V, 有向辺(ゆうこうへん)集合 (directed edge set) A からなる有向グラフ (directed graph) $G = (V, A)$ が与えられたとする．グラフ G は有向非巡回(ひじゅんかい)グラフ (directed acyclic graph, DAG) である，すなわち有向閉路 (directed cycle) を含まないものとする．各有向辺 (directed edge) $(v, u) \in A$ には重み(おも) (weight) $w(v, u)$ が与えられる．グラフと辺重みの例を下の図に示す．有向パス (directed path) $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ は，$i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して $(u_i, u_{i+1}) \in A$ を満たすもののことを言う．有向パス $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ の長さをその辺重みの総和，すなわち $\sum_{i=1}^{k-1} w(u_i, u_{i+1})$ で定義する．以下では，全ての頂点への有向パスがあるような始点(してん) (start vertex) s が G の中に存在すると仮定する．始点 s から頂点 v への有向パスの中で最も長いものを v への最長(さいちょう)パス (longest path) と言い，その長さ $d[v]$ を最長パス長 (longest-path length) と言う．始点 s に対して $d[s] = 0$ である．



(i) 上のグラフでは v_1 が始点である．$d[v_4]$ は，$d[v_2]$ と $d[v_3]$ および各辺重みがあれば求めることができる．その導出に使える関係式を最大値関数 max を用いて記せ.

(ii) 上のグラフの $d[v_1], d[v_2], \ldots, d[v_7]$ の値を求めよ.

(iii) 始点 s を持つ $G = (V, A)$ が与えられたとする．このとき各頂点 v に対し，$d[v]$ が満たす式を (i) で得た関係式を一般化する形で与えよ.

(iv) (iii) で得た式を更新式として用いる動的計画法(どうてきけいかくほう) (dynamic programming) に基づく各頂点の $d[v]$ を求めるアルゴリズムを記述し，その時間計算量(じかんけいさんりょう) (time complexity) を評価せよ．アルゴリズムの記述には動作が明確になるように擬似(ぎじ)コード (pseudocode) 等を用いること.

(v) 始点 s を持つ $G = (V, A)$ の各頂点 v への最長パスの本数 (the number of longest paths) を $c[v]$ とする．上のグラフにおける $c[v_1], c[v_2], \ldots, c[v_7]$ の値を求めよ．

(vi) (iv) で得たアルゴリズムを拡張して各頂点 v の $c[v]$ も求められるようにしたい．どのように変更すればよいかを記述せよ．