

令和 6 年度

名古屋大学 大学院 情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（オンライン筆記試験）

令和 5 年 8 月 2 日

解答時間 12:30 - 14:00
答案提出 14:00 - 14:15

注意事項

1. 事前配布物：「令和 6 年度 名古屋大学 大学院情報学研究科 数理情報学専攻 博士前期課程 7・8 月実施入学試験 実施要領」および「入試連絡票」に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。
2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の 1 言語間の辞書 1 冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。
3. 日本語または英語で解答すること。
4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、数学基礎論、量子力学、離散最適化の 6 問である。このうち 2 問を選択して解答すること。選択した 問題名を解答用紙の上部に記入すること。
5. 解答用紙は片面のみを使用し、裏面には何も書き込まないこと。
6. 全ての 解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。
7. 問題毎に異なる解答用紙を用いること。1 枚の解答用紙に書ききれない場合は、2 枚目の解答用紙を使用してもよい。2 枚目を使用した場合は、1 枚目の解答用紙表面右下に「2 枚目使用」と明記すること。一つの問題に 3 枚以上の解答用紙を使用することは認めない。3 枚目以降は提出されても採点しない。
8. 解答用紙を提出する前に 各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に $1/k, 2/k, \dots, k/k$ と番号をつけて提出すること。
9. 指定された方法で解答用紙を提出すること。
10. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに 緊急連絡先： XXXXXXXXXX（日本国外から：+81-XXXXXXXXXX）へ連絡しその指示に従うこと。

1: 線形代数

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ を任意の2次元実ベクトル (すなわち $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$) とする.

クロネッカー積 (Kronecker product) $\otimes$ を

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 \mathbf{w} \\ v_2 \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ v_2 w_1 \\ v_2 w_2 \end{pmatrix}$$

と定義する. 以下の各問に答えよ.

- (1) クロネッカー積は双線形性 (bilinearity) をもつこと, すなわち, 次の条件

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2$$

$$(a\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (a\mathbf{w}) = a(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$$

をすべての $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ に対して満たすことを示せ.

- (2) クロネッカー積の定義を拡張して, 任意の2次元実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に対して, $A \otimes B$ を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

と定義すると, すべての2次元実ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ に対して

$$(A \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = A\mathbf{v} \otimes B\mathbf{w}$$

が成り立つことが簡単な計算で分かる. このことを用いて, $\mathbf{v}$ が α を固有値 (eigenvalue) にもつ A の固有ベクトル (eigenvector), $\mathbf{w}$ が β を固有値にもつ B の固有ベクトルとすると, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ が $\alpha\beta$ を固有値にもつ $A \otimes B$ の固有ベクトルとなることを示せ.

- (3) 実行列

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

2: 微分積分

$\arctan(x)$ は $\tan x$ の逆関数 (inverse function) を表すものとする。以下の各問に答えよ。必要であれば

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

(C は積分定数 (constant of integration)) を用いてもよい。

- (1) $\beta > \alpha > 0$ とする。 $D_1(\alpha, \beta) := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, \alpha \leq x \leq \beta\}$ に対して,

$$S_1(\alpha, \beta) := \iint_{D_1(\alpha, \beta)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$$

を求めよ。

- (2) $n \geq 1$ とする。 $D_2(n) := \{(x, y) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq y \leq x\}$ に対して,

$$S_2(n) := \iint_{D_2(n)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$$

を求めよ。

- (3) $D_3 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 2\sqrt{2}, y \geq 0\}$ に対して,

$$S_3 := \iint_{D_3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$$

を求めよ。



3: 代数学

θ を代数的整数 (algebraic integer) とし, その最小多項式 (minimal polynomial) の定数項 (constant term) を n とする. 以下の各問に答えよ.

- (1) $\mathbb{Z}[\theta]$ の元 (element) α を $\alpha = a + \beta\theta$ ($a \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}[\theta]$) と表したとき, 写像 (mapping)

$$\mathbb{Z}[\theta] \ni \alpha \mapsto \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

は well-defined であることを示せ.

- (2) 有理素数 (rational prime number) p に対して,

$$\mathbb{Z}[\theta]/(p, \theta) \cong \begin{cases} 0 & (p \nmid n) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & (p \mid n) \end{cases}$$

を示せ. ただし, 0 は零環 (zero ring) とする.



4: 数学基礎論

以下の $\mathcal{C}$ -対象 (object) と $\mathcal{C}$ -射 (morphism) からなる圏 (category) を $\mathcal{C}$ と書く.

- $\mathcal{C}$ -対象とは, 集合 $|X|$ から実数の単位区間 $[0, 1]$ への写像 $E_X: |X| \rightarrow [0, 1]$ の対 $X = (|X|, E_X)$ を指すとする.
- $\mathcal{C}$ -対象 X, Y の間の $\mathcal{C}$ -射 $f: X \rightarrow Y$ とは, 写像 $f: |X| \rightarrow |Y|$ であって, 任意の $x \in |X|$ に対して, $E_X(x) \leq E_Y(f(x))$ を満たすものとする.

$\mathcal{C}$ -対象 Z を終域 (codomain) とするモノ射 (monomorphism) $m: A \rightarrow Z$ と $n: B \rightarrow Z$ に対して, $m \leq n$ とは, ある $\mathcal{C}$ -射 $\varphi: A \rightarrow B$ が存在して, $m = n \circ \varphi$ となることである. また, $m \leq n$ かつ $n \leq m$ であるとき, $m \equiv n$ と書く. Z を終域とするモノ射の $\equiv$ -同値類を Z の部分対象 (subobject) と呼ぶ. このとき, Z の部分対象全体は上記の関係 $\leq$ によって半順序付けられ, これを $\text{Sub}(Z)$ と書く.

以下の各問に答えよ.

- (1) 圏 $\mathcal{C}$ が二項積 (binary product) および二項余積 (binary coproduct) を持つことを示せ.
- (2) 任意の $\mathcal{C}$ -対象 Z に対して, その部分対象半順序 $\text{Sub}(Z)$ が束 (lattice) をなすことを示せ.

5: 量子力学

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ただし, $i := \sqrt{-1}$)
とすると、以下の各問に答えよ。

- (1) X が観測量 (observable) を表すことを示せ。
- (2) 指数行列 (matrix exponential) $e^{i\frac{\pi}{4}X}$ を 2 行 2 列の行列で表せ。
- (3) 状態 (state) $|\varphi\rangle$ 及び $|\psi\rangle$ に対して、期待値 (expectation value) $\langle X \rangle_{\varphi} := \langle \varphi | X | \varphi \rangle$ と $\langle X \rangle_{\psi} := \langle \psi | X | \psi \rangle$ を求めよ。
- (4) 量子系 (quantum system) の状態が、ある確率 (probability) p で $|\varphi\rangle$ 、確率 $1-p$ で $|\psi\rangle$ となっている場合を考える。このときの X の期待値を求めよ。
- (5) 二体量子系 (two-body quantum system) の状態 $|\Phi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$ を考える。
このときの期待値 $\langle X \otimes X \rangle_{\Phi} := \langle \Phi | X \otimes X | \Phi \rangle$ を求めよ。
- (6) 二体量子系の状態が、ある確率 p で $|0\rangle \otimes |0\rangle$ 、確率 $1-p$ で $|1\rangle \otimes |1\rangle$ となる場合を考える。このときの $X \otimes X$ の期待値を求めよ。

6: 離散最適化

以下の各問に答えよ.

(1) 以下のオーダー表記 (O -notation) を簡潔にせよ (simplify). 結果だけ示せばよい.

- (i) $O(32n^{2.8}(\log n)^{15} + 0.1n^3 + n^2\sqrt{n})$
- (ii) $O((3/2)^n + 50n^{20})$
- (iii) $O(n^{0.1+\log_2 5} + 5^{\log_2 n})$

(2) 各要素 (item) j ($j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$) の利得 (profit) p_j と重み (weight) w_j , およびナップサックの容量 (capacity) c が与えられたとき, n 個の要素からいくつかを選んでナップサックに入れ, それらの重みの合計がナップサックの容量を超えないという条件 (constraint) のもとで, 利得の合計を最大化する問題をナップサック問題 (knapsack problem) と呼ぶ. すなわち, ナップサックに入れる要素集合を $X \subseteq J$ とすると, 条件 $\sum_{j \in X} w_j \leq c$ のもとで $\sum_{j \in X} p_j$ を最大化 (maximize) する X を求める問題である. 条件 $\sum_{j \in X} w_j \leq c$ を満たす X を実行可能解 (feasible solution) という. 以下では $\sum_{j \in J} w_j > c$ を仮定する. 以下の各小問に答えよ.

(i) 以下の問題例 (problem instance) に対するできるだけ良い実行可能解を示せ.

j	1	2	3	4	5
w_j	5	6	7	8	9
p_j	4	5	6	7	8

$c = 19$

- (ii) ナップサック問題を整数計画問題 (integer programming problem) に定式化せよ.
- (iii) J の要素を p_j/w_j の大きい順に並べた順序を $j_1, j_2, \dots, j_n$ とし (すなわち $p_{j_1}/w_{j_1} \geq p_{j_2}/w_{j_2} \geq \dots \geq p_{j_n}/w_{j_n}$), $j_1, j_2, \dots$ の順にナップサックに入れるものを選んでいく (j_l を入れると容量を超えてしまう時は次の要素 j_{l+1} を試す) 欲張り法 (greedy method) を考える. 以下のそれぞれに対し, 主張 (claim) が正しければ証明 (prove) し, 正しくなければ反例 (counter example) を挙げよ.

主張 A. 欲張り法によって常に最適解 (optimal solution) が得られる.

主張 B. ある定数 $\alpha (> 0)$ が存在し, 欲張り法によって得られる総利得 z と最適値 (optimal value) z^* の比 z/z^* は常に α 以上になる.

- (iv) 上の問 (2) の (iii) で定義したソート列 (sorted sequence) $j_1, j_2, \dots, j_n$ の順にナップサックに入れていくとき, 初めてナップサックの容量を超える要素を j_{l^*} (すなわち $\sum_{l=1}^{l^*-1} w_{j_l} \leq c < \sum_{l=1}^{l^*} w_{j_l}$) とする. 以下の主張が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

主張 C. $(c - \sum_{l=1}^{l^*-1} w_{j_l})p_{j_{l^*}}/w_{j_{l^*}} + \sum_{l=1}^{l^*-1} p_{j_l}$ は最適値の上界 (upper bound) を与える.

注. 整数計画問題は,

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{j=1}^n d_j x_j \\ \text{制約条件} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

と書ける問題である. ここで x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) は^{けっていへんすう}決定変数 (decision variables), n, m, d_j, a_{ij}, b_i ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) は^{しよよのていすう}所与の定数 (given constants) である.

