令 和 2 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（専門）

令和元年８月７日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．日本語または英語で解答すること。

５．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

６．問題は、線形代数、微分積分、離散数学、グラフ理論、数学基礎論、量子力学、アルゴリズム設計の７科目である。このうち３科目を選択して解答すること。選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。ただし、数学基礎論は選択問題であり、問題はIとIIからなる。数学基礎論を選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後３枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1．(線形代数学)

P_2 を 2 次以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする．その中で，内積を次のように定義する：

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,.$$

(1) 通常の和 (addition) と実数倍 (scalar multiplication) の演算に関して P_2 が閉じている (closed under the operations) ことを確かめよ．

(2) $\mathcal{B} = \{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\}$ が P_2 の基底（basis）であることを示せ．

(3) グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の直交化法を用いて，$\mathcal{B}$ から新たな（上記の内積によって）直交基底（基底をなすベクトル同士が互いに直交するような基底）$\tilde{\mathcal{B}}$ を計算せよ．

(4) 微分演算子 $\frac{d}{dx}$ が線形写像 (linear mapping) であることを示して，基底 $\mathcal{B}$ と $\tilde{\mathcal{B}}$ におけるそれぞれの表現行列 (matrix representation) を求めよ．

問題 2. (微分積分学)

以下の各問に答えよ．

(1) I を開区間 (open interval) とし，$a \in I$ とする．関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能 (differentiable) でかつ $f(a)$ が I における $f(x)$ の最大値 (maximum) ならば，$f'(a) = 0$ であることを証明せよ．

(2) 次の不定積分を計算せよ．

$$\int \frac{5x^2 + 5x + 2}{4x^3 + x^2 + 4x + 1} dx$$

(3) a, h を実数とし，$-1 \leq a \leq 1$, $0 \leq h$ かつ $a + h \leq 1$ とする．このとき，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上で $a \leq z \leq a + h$ をみたす部分の表面積 (surface area) を求めよ．

問題 3. (離散数学)

(1) 正整数 n に対して，オイラー (Euler) 関数 $\varphi(n)$ の定義を述べ，

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

が成立することを証明せよ．ただし，p は n のすべての正の素因子をわたるものとし，この等式を $\varphi(n)$ の定義にしてはならない．

(2)

$$\varphi(n) = n \sum_{d \mid n} \frac{f(d)}{d}$$

が任意の正整数 n に対して成立する関数 f を求めよ．ただし，d は n のすべての正の約数をわたるものとする．

(3) 互いに素な正整数 m, n に対して，

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

を証明せよ．

問題 4. (グラフ理論)

頂点 (vertex) 集合 V_1, V_2 および V_1 に属する頂点と V_2 に属する頂点を結ぶ辺 (edge) の集合 E からなる無向二部グラフ (undirected bipartite graph) $G=(V_1,V_2,E)$ を考える．頂点 u の隣接点 (adjacent vertices) 集合 $\{v \mid \{u,v\} \in E\}$ を $N(u)$ で表し，頂点集合 U に対するその隣接点集合 $\bigcup_{u\in U} N(u)$ を $N(U)$ で表す．このとき，以下の命題 (proposition) が知られている．

命題 A：二部グラフ $G=(V_1,V_2,E)$ において，(I) と (II) は同値 (equivalent) である:

(I) 頂点集合 V_1 を被覆 (cover) するマッチング (matching) M が存在する (このとき，$|V_1|=|M|$ である)．

(II) 任意の $S \subseteq V_1$ に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成立する．

ページ下部の定義を参考にし，以下の各問に答えよ．

(1) 図 1 のグラフにおける以下の条件を満たすマッチングをそれぞれ一つ挙げよ．またそのマッチングによって被覆される V_1 の部分集合も記せ．さらに (iii) は最大である理由も説明すること．その際，命題 A が成立することを用いて良い．

(i) 辺数 2 のマッチング

(ii) 辺数 3 の極大 (maximal) マッチング

(iii) 辺数が最大のマッチング

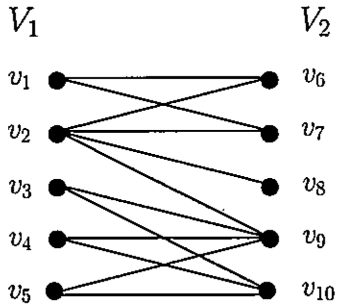

図 1: 二部グラフの例

(2) 命題 A が成立することを証明したい．

(i) 任意の二部グラフ $G=(V_1,V_2,E)$ において，(I) ならば (II) が成立することを示せ．

(ii) $|V_1'| \leq k$ を満たす任意の二部グラフ $G'=(V_1',V_2',E')$ において，(II) ならば (I) であると仮定する．このとき，$|V_1|=k+1$ を満たす二部グラフ $G=(V_1,V_2,E)$ が (II) を満たすならば，以下が成立することを示せ．

(ii-1) 任意の $S \subsetneq V_1$ に対して $|S| < |N(S)|$ であるなら，(I) が成立する．

(ii-2) ある $S \subsetneq V_1$ に対して $|S| = |N(S)|$ であるなら，(I) が成立する．

(定義)　グラフ G の辺集合 E の部分集合 $E' \subseteq E$ に対して，各辺の両端点 (end vertices) からなる頂点集合 $\bigcup_{\{u,v\}\in E'}\{u,v\}$ を $V(E')$ で表す．辺集合 $M \subseteq E$ は，M に属するどの 2 辺も互いに端点を共有 (share) しないとき，マッチングという．すなわち，任意の $e, e' \in M$ に対して，$e \neq e'$ ならば，$V(\{e\}) \cap V(\{e'\}) = \emptyset$ である．グラフ G のマッチング M が極大であるとは任意の $e \in E \setminus M$ に対して，$M \cup \{e\}$ がマッチングではないときのことをいう．マッチング M と頂点集合 U が与えられたとき，$U \subseteq V(M)$ であるならば，M は U を被覆するという．

問題 5. (数学基礎論)

数学基礎論は選択問題である. 次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ. 解答用紙の指定欄に, どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ.

I.

以下の各問に答えよ.

集合 X, Y について, 差集合 (set difference) $X \setminus Y$ が有限であることを, X は Y にほとんど含まれる (X is almost included in Y) といい, $X \subseteq^* Y$ と表す.

(1) 関係 $\subseteq^*$ は推移的 (transitive) であることを示せ. つまり, 集合 X, Y, Z について, $X \subseteq^* Y \subseteq^* Z$ ならば $X \subseteq^* Z$ であることを示せ.

(2) 集合 X, Y, Z について, $X \subseteq^* Y$ かつ $X \subseteq^* Z$ ならば, $X \subseteq^* Y \cap Z$ であることを示せ.

以下では, $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表すものとし, 2 つの集合族 $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{Y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ で, 次の条件をみたすものを考える:

$$\text{任意の } i, j \in \mathbb{N} \text{ について } X_i \subseteq^* Y_j.$$

(3) 任意の $i \in \mathbb{N}$ について, $X_i \subseteq^* \bigcap\{Y_j \mid j \leq i\}$ であることを示せ.

(4) 次をみたす集合 Z が存在することを示せ:

$$\text{任意の } i, j \in \mathbb{N} \text{ について } X_i \subseteq^* Z \subseteq^* Y_j.$$

(II は次のページにある.)

II.

算術の言語 (language of first-order arithmetic) の Δ_0-閉論理式 (closed formula, sentence) A に対して，集合 $\mathfrak{R}_A \subseteq \mathbb{N}$ を以下によって定義する：

- A が $\mathbb{N}$ において真 (true) である場合，$\mathfrak{R}_A = \mathbb{N}$.
- A が $\mathbb{N}$ において偽 (false) である場合，$\mathfrak{R}_A = \emptyset$.

閉論理式 A が Δ_0 でない場合は，集合 $\mathfrak{R}_A \subseteq \mathbb{N}$ を以下のように帰納的に定義する．

- $A \equiv B \wedge C$ のとき，$\mathfrak{R}_A = \{\langle d, e\rangle \mid d \in \mathfrak{R}_B \wedge e \in \mathfrak{R}_C\}$.
- $A \equiv B \vee C$ のとき，$\mathfrak{R}_A = \{\langle 0, e\rangle \mid e \in \mathfrak{R}_B\} \cup \{\langle 1, e\rangle \mid e \in \mathfrak{R}_C\}$.
- $A \equiv B \to C$ のとき，
$$\mathfrak{R}_A = \{e \mid \forall n \in \mathbb{N}\, [n \in \mathfrak{R}_B \ \to\ (\varphi_e(n)\downarrow \ \wedge \varphi_e(n) \in \mathfrak{R}_C)]\}.$$
- $A \equiv \exists n B(n)$ のとき，$\mathfrak{R}_A = \{\langle n, e\rangle \mid e \in \mathfrak{R}_{B(\underline{n})}\}$.
- $A \equiv \forall n B(n)$ のとき，$\mathfrak{R}_A = \{e \mid \forall n \in \mathbb{N}\, [\varphi_e(n)\downarrow \ \wedge \varphi_e(n) \in \mathfrak{R}_{B(\underline{n})}]\}$.
- $A \equiv \neg B$ のとき，$\neg B$ は $B \to \bot$ の略記とし，$\bot$ は $\mathbb{N}$ で常に偽である文である，つまり $\mathfrak{R}_\bot = \emptyset$ と仮定する．

以下の各問に答えよ．

(1) 任意の閉論理式 A に対して，$\mathfrak{R}_{(\neg A)\vee(\neg\neg A)} \neq \emptyset$ であることを示せ．

(2) 任意の Σ_1-論理式 $A(n)$ に対して，$\mathfrak{R}_{\forall n\,[(\neg\neg A(n))\to A(n)]} \neq \emptyset$ であることを示せ．

(3) $\mathfrak{R}_{\forall n\,[A(n)\vee\neg A(n)]} = \emptyset$ であるような Σ_1-論理式 $A(n)$ が存在することを示せ．

定義 1. 算術の言語 $\{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$ の論理式 A について，以下の概念を考える：

- A が Δ_0 $\iff$ すべての量化記号 (quantifier) の出現が有界 (bounded) である．
- A が Σ_1 $\iff$ ある Δ_0-論理式 B が存在して，$A \equiv \exists n_1 \exists n_2 \ldots \exists n_k B(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ と書ける．

定義 2. 自然数 e でコードされた $\mathbb{N}$ 上の部分計算可能関数 (partial computable function) を φ_e と書き，入力 x に対して φ_e の計算が停止するとき $\varphi_e(x)\downarrow$ と書く．また，その出力 y であったとき，$\varphi_e(x)\downarrow= y$ と書く．

次のような Δ_0-論理式 D が存在することを仮定してよい．

$$\varphi_e(x)\downarrow= y \iff \exists s\, D(\underline{e}, \underline{x}, \underline{y}, s) \text{ は } \mathbb{N} \text{ において真}$$

ここで，$\underline{n}$ は項 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個}}$ の略記である．

定義 3. 全単射 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は，カントールの対関数 (pairing function) とする．

問題 6. (量子力学)

ベクトル $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ （ただし $x^2 + y^2 + z^2 = 1$）とベクトル $\boldsymbol{\sigma} = (X, Y, Z)$ （ただし $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり， $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である）と置く．

(1) 演算子 $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} = xX + yY + zZ$ が観測量（observable）であることを示せ．

(2) I が単位行列を表すとする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n} = I$ と $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n+1} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を示せ．

(3) 上記の関係を用いて，$e^{it\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = (\cos t)I + (i \sin t)\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}$（$t$ は任意の実数）を示せ．

(4) $U_t = e^{it\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ が，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，ユニタリー行列であることを示せ．

(5) $|\psi\rangle$ を $+1$ を固有値にもつ Z の固有状態とする．$|\psi_t\rangle$ を時間発展させた状態 $U_t|\psi\rangle$ とする．バリアンス（variance） $\sigma(Z,t)^2 := \langle\psi_t|Z^2|\psi_t\rangle - \langle\psi_t|Z|\psi_t\rangle^2$ を z と t を用いて表せ．

問題 7. (アルゴリズム設計法)

以下の各問に答えよ．

(1) 入力サイズ (input size) n に関する時間計算量 (time complexity) を表す関数 $T_1(n)$ と $T_2(n)$ が，ある単調増加関数 (monotonically increasing function) $f(n)$ に対して $T_1(n) = O(f(n))$ かつ $T_2(n) = O(f(n))$ を満たすものとする．以下の各式が成立するか否かを答えよ．また，成立しない場合はそのような例を挙げよ．

(i) $T_1(n) + T_2(n) = O(f(n))$

(ii) $T_1(n) - T_2(n) = o(f(n))$

(iii) $T_1(n)/T_2(n) = O(1)$

(iv) $T_1(n) = O(T_2(n))$

(2) n 個 $(n \geq 1)$ の実数の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，その部分列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ で $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ を満たすものを増加部分列と呼び (便宜上長さ k が 1 のものも増加部分列とみなす)，その中で長さ k が最大のものを最長増加部分列 (longest increasing subsequence) と呼ぶ．以下の各問に答えよ．

(i) 数列 $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6$ に対する最長増加部分列を 1 つ求めよ．

(ii) 最長増加部分列の長さが n となるような長さ n の数列の作り方，および最長増加部分列の長さが 1 となるような長さ n の数列の作り方を説明せよ．

(iii) 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，それに含まれる部分列を全て列挙してその各々が増加部分列になっているかどうかを確認し，増加部分列になっているものの中から長さ最大のものを選ぶアルゴリズムの計算量を述べよ．

(iv) 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，その最長増加部分列を計算するできるだけ効率の良いアルゴリズムを設計せよ．

(v) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $a_i \in \{1, 2, \ldots, b\}$ であり，整数 $b = O(1)$ であるとき，数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の最長増加部分列を計算するできるだけ効率の良いアルゴリズムを設計せよ．

なお，アルゴリズムの計算量の議論においては，実数の四則演算や大小比較，変数や配列の内容の参照や更新などの基本的な操作がいずれも $O(1)$ 時間でできるものとしてよい．