平 成 ３１ 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（専門）

平成３１年２月１４日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．日本語を母語としない者は、日本語から母語への辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．日本語または英語で解答すること。

５．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認すること。

６．問題は線形代数、微分積分、離散数学（グラフ理論含む）の３科目がある。このうち<u>２科目を選択して</u>解答すること。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。
ただし、<u>離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。離散数学を選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ</u>。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)

実変数 x_1, x_2, x_3 に関する 2 次形式 (quadratic form)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$$

（ただし，a, b, c は正の整数 (positive integer)）について以下の問に答えよ．なお，${}^tM$ は M の転置（transpose）を表すものとする．

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して，$f(x_1, x_2, x_3) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表せるような 3 次対称行列 (symmetric matrix) A を求めよ．

(2) A が -1 と 2 を固有値 (eigenvalue) にもつとき，a, b, c を求めよ．

以下，a, b, c は (2) で求めたものとする．

(3) A を対角化 (diagonalize) せよ．

(4) $f(x_1, x_2, x_3)$ の標準形 (canonical form) を与える直交行列 (orthogonal matrix) Q，つまり

$${}^t(Q\boldsymbol{y})A(Q\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

（ただし，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ で $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は A の固有値）となる直交行列 Q を 1 つ求めよ．

問題 2. (微分積分)

(1) 領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{y^2 \cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - 1} dxdy$$

の値を求めよ.

(2) 実数 x, y が $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ をみたすならば,

$$|\tan x - \tan y| \leq 4|x - y|$$

が成り立つことを示せ.

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ．解答用紙の科目名欄に，どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I.

次の整数

$$2^{3^4} - 1 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1}\frac{2^9 - 1}{2^3 - 1}\frac{2^{27} - 1}{2^9 - 1}\frac{2^{81} - 1}{2^{27} - 1}$$

は少なくとも 4 個の異なる素因子（prime factor）をもつことを証明せよ．

II.

頂点 (vertex) 集合 V, 辺 (edge) 集合 E をもつ無向グラフ (undirected graph) $G=(V,E)$ を考える.

- V の部分集合 S に対し, S が誘導 (または生成, induce) する G の部分グラフ (subgraph) $G[S]$ とは, 頂点集合が S, 辺集合が $\{\{u,v\}\in E \mid u,v\in S\}$ であるもののことをいう. また, グラフ H がグラフ G の誘導 (生成) 部分グラフ (induced subgraph) であるとは, $G[S]$ が H と同型 (isomorphic) となるような $S\subseteq V$ が存在するときにいう.

- $\{V_1,V_2\}$ が V の分割 (partition) であるとは $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$ であるときにいう. また V のある分割 $\{V_1,V_2\}$ において, V_1 の頂点同士, および V_2 の頂点同士の間に辺が無いとき, グラフ G は二部グラフ (bipartite graph) であるといい, $G=(V_1,V_2,E)$ と表す.

- 二部グラフ $G=(V_1,V_2,E)$ の辺が $E=\{\{u,v\}\mid u\in V_1, v\in V_2\}$ であるとき, G は完全二部グラフ (complete bipartite graph) であるといい, $K_{p,q}$ で表す. ただし, $p=|V_1|, q=|V_2|$ である.

- グラフ G の頂点集合 V の頂点全てからなる列 (sequence) $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ に対して, $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{n-1},v_n\}\}$ であるとき, $G=(V,E)$ は n 頂点パス (路, 道, path) であるといい, P_n で表す.

以上を踏まえた上で, 以下の各問に答えよ.

(1) $K_{4,3}$ と P_5 を描画せよ.

(2) 図 1 のグラフの頂点集合の部分集合 $\{v_1,v_3,v_5,v_7\}$ が誘導する部分グラフ, および $\{v_2,v_4,v_6,v_8\}$ が誘導する部分グラフをそれぞれ描画せよ.

(3) $n\geq 2$ とする. n 頂点からなるパス P_n は (A) 二部グラフである, (B) 二部グラフではない, (C) n によって二部グラフのときとそうでないときがある, のいずれが正しいか答えよ. またその理由を説明せよ.

(4) 完全二部グラフ $K_{p,q}$ を考える. P_4 は $K_{p,q}$ の誘導部分グラフではないことを示せ.

(5) 連結二部グラフ $G=(V_1,V_2,E)$ を考える (ただし, $V_1\neq\emptyset$, $V_2\neq\emptyset$ とする). P_4 が G の誘導部分グラフではないならば, G は完全二部グラフであることを示せ.

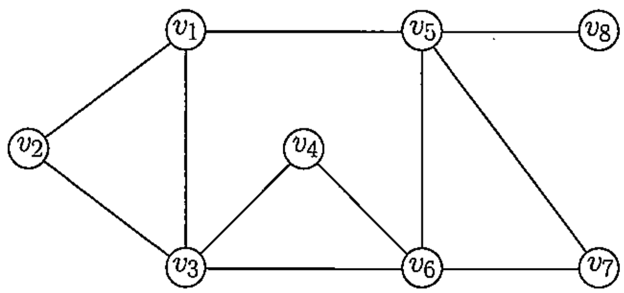

図 1: グラフの例