# 令和7年度

# 名古屋大学 大学院 情報学研究科
# 数理情報学専攻
# 入学試験問題（オンライン筆記試験）

令和６年８月７日

解答時間　１２：３０－１４：００
答案提出　１４：００－１４：１５

## 注意事項

1. 事前送付物：「令和７年度 名古屋大学 大学院情報学研究科 数理情報学専攻 博士前期課程６・８月実施入学試験 実施要領」および「入試連絡票」に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。

2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。

3. 日本語または英語で解答すること。

4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、数学基礎論、量子力学、離散最適化の６問である。このうち2問を選択して解答すること。選択した問題名を解答用紙の上部に記入すること。

5. 解答用紙は片面のみを使用し、裏面には何も書き込まないこと。

6. 全ての解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7. 問題毎に異なる解答用紙を用いること。１枚の解答用紙に書ききれない場合は、２枚目の解答用紙を使用してもよい。２枚目を使用した場合は、１枚目の解答用紙表面右下に「２枚目使用」と明記すること。一つの問題に３枚以上の解答用紙を使用することは認めない。３枚目以降は提出されても採点しない。

8. 解答用紙を提出する前に各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に 1/k, 2/k,⋯, k/k と番号をつけて提出すること。

9. 指定された方法で解答用紙を提出すること。

10. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに緊急連絡先：090-5617-0248 （日本国外から：+81-90-5617-0248）へ連絡しその指示に従うこと。

## 1: 線形代数

部分空間 (subspace) $W \subset \mathbb{R}^4$ を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ u - x - y + z = 0 \text{ かつ } u + y = 0 \right\}$$

と定義する．以下の問に答えよ．

(1) $W$ の基底 (basis) を一つ求めよ．

(2) $W^{\perp}$ を $W$ の直交補空間 (orthogonal complement) とする．$W^{\perp}$ の基底を一つ求めよ．

(3) 以下の条件を満たすような $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底 (orthonormal basis) $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ を求めよ：

(i) ベクトル $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ の張る (span) 空間は $W$,

(ii) ベクトル $\boldsymbol{w}_3$ と $\boldsymbol{w}_4$ の張る空間は $W^{\perp}$,

となる．

(4)

$$L\boldsymbol{w} = \begin{cases} 4\boldsymbol{w}\ , & \forall \boldsymbol{w} \in W \\ 8\boldsymbol{w}\ , & \forall \boldsymbol{w} \in W^{\perp} \end{cases}$$

を満たす線型写像 (linear mapping) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の標準基底 (standard basis) における表現行列 (representation matrix) を求めよ．

## 2: 微分積分

以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $f$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する.

(i) $f$ は微分可能 (differentiable) であることを示せ.

(ii) $x = 0$ において $f'$ は連続 (continuous) であるか判定せよ.

(2) 次の定積分 (definite integral) を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4dx}{(1+\sin x)\cos x}$$

(3) 次の無限級数 (infinite series) がそれぞれ収束 (convergent) するか否か, 理由とともに答えよ.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{2^n}$ (ただし $p(n)$ は $n$ が素数 (prime number) のとき $-1$, それ以外のとき 1)

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$

## 3: 代数学

以下の各問に答えよ．

(1) $\Omega$ を代数的閉体 (algebraic closed field) とする．体 $K$ から $\Omega$ への同型写像 (isomorphism) が存在すれば，$K$ も代数的閉体であることを示せ．

(2) $q$ 個の元から構成される有限体 (finite field) を $\mathbb{F}_q$ と表わし，その標数 (characteristic) を $p$ とする．以下は，$\mathbb{F}_q$ の代数的閉包 (algebraic closure) $\overline{\mathbb{F}_q}$ を固定して $\overline{\mathbb{F}_q}$ 内で考察するものとする．

(i) $\mathbb{F}_q$ の $\mathbb{F}_p$ 上の拡大次数 (degree of a field extension) を $m$ とするとき，$q$ を $p$ と $m$ を用いて表わせ．

(ii) $\sigma$ を $p$ 乗写像 ($p$th power map) とするとき，$\sigma$ は $\overline{\mathbb{F}_q}$ の自己同型写像 (automorphism) であることを示せ．

(iii) 正整数 (positive integer) $n$ に対して，$\sigma^n$ の $\mathbb{F}_q$ における固定体 (fixed field) を求め，さらに，$\mathbb{F}_p$ 上の拡大次数を $m$ と $n$ を用いて表わせ．

## 4: 数学基礎論

以下，自然数 (natural number) 全体の集合 $\omega$ には離散位相 (discrete topology) が，$\omega^\omega$ にはその直積位相 (product topology) が入っているとする．同様に，$\{0,1\}$ には離散位相，$\{0,1\}^\omega$ にはその直積位相が入っているとする．自然数の有限列 (finite string) 全体の集合を $\omega^{<\omega}$ と書く．集合 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ が木 (tree) であるとは，$T$ が始切片 (initial segment) について閉じていることを意味する．木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ が有限分岐 (finitely branching) であるとは，$T$ に属す任意の有限列 $\sigma$ に対して，$\sigma$ を長さ 1 だけ拡張した有限列のうち $T$ に属すものは高々有限個しか存在しないことを意味する．木 $T$ の無限パス (infinite path) とは，$p \in \omega^\omega$ であり，任意の $n \in \omega$ に対して，有限始切片 $\langle p(k) \rangle_{k<n}$ が $T$ に属すものを指す．

以下の各問に答えよ．

(1) 集合 $A \subseteq \omega^\omega$ が閉 (closed) であることと $A$ がある木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ の無限パス全体の集合であることは同値であることを示せ．

(2) 集合 $A \subseteq \omega^\omega$ がコンパクト (compact) であることと $A$ がある有限分岐木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ の無限パス全体の集合であることは同値であることを示せ．

(3) 閉集合 $A \subseteq \{0,1\}^\omega$ を定義域とする連続 (continuous) 関数 $F\colon A \to \omega^\omega$ に対して，ある $g\colon \omega \to \omega$ が存在して，任意の $\alpha \in A$ に対して $F(\alpha) \in \prod_{n\in\omega} g(n)$ であることを示せ．

## 5: 量子力学

以下の各問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ （ただし，$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$）が観測量 (observable) となる条件を述べよ．

(2) $A$ が観測量であれば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，指数行列 (matrix exponential)$e^{itA}$ （ただし，$i := \sqrt{-1}$）がユニタリー行列 (unitary matrix) となることを示せ．

(3) $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とする．指数行列 $e^{itB}$ の成分表示を求めよ．

(4) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ を時刻 $t = 0$ における系の状態とする．$|\psi(t)\rangle = e^{itB}|\psi\rangle$ を時刻 $t > 0$ における系の状態とする．$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．時刻 $t$ における期待値 (expectation value) $\langle X \rangle_{\psi(t)} := \langle \psi(t)|X|\psi(t)\rangle$ および分散 (variance) $\sigma^2_{\psi(t)}(X) := \langle X^2 \rangle_{\psi(t)} - \langle X \rangle^2_{\psi(t)}$ を求めよ．

(5) 二体 (bipartite) 量子状態 $|\Phi\rangle = \dfrac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2}$ を考える．これはエンタングル状態 (entangled state) であるかどうか判定せよ．

(6) 期待値 $\langle X \otimes X \rangle_\Phi := \langle \Phi | X \otimes X | \Phi \rangle$ を求めよ．

## 6: 離散最適化

[1] 以下の各問に答えよ．

(1) 以下のオーダー表記 (order notation) をできるだけ簡潔にせよ (simplify)(答えだけ述べればよい)．

(i) $O(3n + 0.5^{n^n})$

(ii) $O(100n^{1.999}(\log n)^{\log n} + 3n^2)$

(iii) $O(2^{\sqrt{\log n}} + n^2)$

(2) 次の漸化式 (recurrence) を満たす $T(n)$ を $\Theta$ によるオーダー表記で表せ．正しさの説明もすること (explain the correctness)．

$$T(n) = 2T(n/2) + cn \ (n \geq 2), \quad T(1) = 1,$$

(ただし，$c$ は適当な正定数 (a positive constant), $n$ は 2 の冪 (a power of 2) であるとしてよい)．

[2] ある会社では長い自然数長 (a natural number length) の棒 (rod) を短いいくつかの自然数長の棒に分割して販売している．棒の価格は長さによって異なる．例えば次のような価格表 (price list) があった場合，

| 長さ (length) $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 価格 (price) $p_i$ | 1 | 5 | 8 | 9 | 10 |

長さ 4 の棒を $(1,1,2)$ に分けると計 $1\times2+5 = 7$ で売ることができるし，あるいは $(1,3)$ に分けると 9, そのまま分けずに売るのは 9 となる．今，与えられた長さの棒を，総価格 (total price) が最大になる (maximize) ようにカットする問題を考える（最適棒分割問題 (the problem of partitioning a rod optimally)）．長さ 4 の棒が与えられたとき，最適な分割は $(2,2)$ への分割であり，このときの目的関数 (objective function) の最適値 (optimal value) は総価格 $5 \times 2 = 10$ である．

(1) 以下の各問に答えよ．

(i) 上の例で長さ 5 の棒が与えられたとする．このときの最適棒分割問題の最適値を与えよ．最適性についても論じること (explain the optimality)．

(ii) 入力として，棒の長さ $n$ と，長さ $i$ の棒の価格が $p_i$ で与えられるとする ($i = 1, 2, \ldots, n$)．このとき，最適棒分割問題の最適値を求めるアルゴリズムを擬似コード (pseudo code) の形で与えよ．またその（最悪時）計算量 (time complexity) をオーダー（$O(\cdot)$）の形で評価 (evaluate) せよ．評価はできるだけタイト (tight) であることが望ましい．

(2) 上の設定では，棒をカットするためのコスト (cost for cutting) を考えていなかったが，そのコストを差し引いた上でのカットコスト付最適棒分割問題を考える．目的関数は（総価格）－（カットのためのコスト）である．棒を 1 回カットするためのコストが 1 であるとすると，$n=4$ のとき上の表の下でのカットコスト付最適棒分割問題に対する実行可能解（じっこうかのうかい） (feasible solutions) は $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(4)$ の 5 通りであり，それぞれのカットコストが 3, 2, 1, 1, 0 であることから，その目的関数値は $4-3=1$, $7-2=5$, $9-1=8$, $10-1=9$, $9-0=9$ となる．すなわち，最適解は $(2,2)$ または $(4)$ でありその時の目的関数値は 9 である．

(i) 上の例で長さ 5 の棒が与えられたとし，1 回あたりのカットコストを 1 とする．このときのカットコスト付最適棒分割問題の最適値を与えよ．最適性についても論じること．

(ii) 入力として，棒の長さ $n$ と，長さ $i$ の棒の価格 $p_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 1 回あたりのカットコストが $c\ (\geq 0)$ で与えられるとする．このとき，カットコスト付最適棒分割問題の最適値を求めるアルゴリズムを擬似コードの形で与えよ．またその（最悪時）計算量をオーダー（$O(\cdot)$）の形で評価せよ．評価はできるだけタイトであることが望ましい．