令 和 ６ 年 度

名古屋大学 大学院 情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題（オンライン筆記試験）

令和５年８月２日

解答時間　１２：３０－１４：００
答案提出　１４：００－１４：１５

注意事項

1. 事前配布物：「令和６年度 名古屋大学 大学院情報学研究科 数理情報学専攻 博士前期課程７・８月実施入学試験 実施要領」および「入試連絡票」に記載された「試験問題のダウンロードと答案のアップロードの仕方」をよく読み、内容を理解した上で解答を開始しなさい。
2. 外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の試験室への持ち込みは認めない。
3. 日本語または英語で解答すること。
4. 問題は、線形代数、微分積分、代数学、数学基礎論、量子力学、離散最適化の６問である。このうち2問を選択して解答すること。選択した問題名を解答用紙の上部に記入すること。
5. 解答用紙は片面のみを使用し、裏面には何も書き込まないこと。
6. 全ての解答用紙の上部に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。
7. 問題毎に異なる解答用紙を用いること。１枚の解答用紙に書ききれない場合は、２枚目の解答用紙を使用してもよい。２枚目を使用した場合は、１枚目の解答用紙表面右下に「２枚目使用」と明記すること。一つの問題に３枚以上の解答用紙を使用することは認めない。３枚目以降は提出されても採点しない。
8. 解答用紙を提出する前に各解答用紙に番号をつけること。k 枚の解答用紙を提出する場合は、それぞれの解答用紙に 1/k, 2/k,⋯, k/k と番号をつけて提出すること。
9. 指定された方法で解答用紙を提出すること。
10. 試験時間中に、ネットワークトラブル等の不測の事態が発生した場合は、ただちに緊急連絡先：090-2410-7278 （日本国外から：+81-90-2410-7278）へ連絡しその指示に従うこと。

1: 線形代数

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ を任意の 2 次元実ベクトル (すなわち $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$) とする．クロネッカー積（せき）（Kronecker product）$\otimes$ を

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 \boldsymbol{w} \\ v_2 \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ v_2 w_1 \\ v_2 w_2 \end{pmatrix}$$

と定義する．以下の各問に答えよ．

(1) クロネッカー積は双線形性（そうせんけいせい）（bilinearity）をもつこと，すなわち，次の条件

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_2 \\ (a\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes (a\boldsymbol{w}) &= a(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

をすべての $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ に対して満たすことを示せ．

(2) クロネッカー積の定義を拡張して，任意の 2 次元実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に対して，$A \otimes B$ を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

と定義すると，すべての 2 次元実ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して

$$(A \otimes B)(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} \otimes B\boldsymbol{w}$$

が成り立つことが簡単な計算で分かる．このことを用いて，$\boldsymbol{v}$ が α を固有値（こゆうち）（eigenvalue）にもつ A の固有（こゆう）ベクトル（eigenvector），$\boldsymbol{w}$ が β を固有値にもつ B の固有ベクトルとすると，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ が $\alpha\beta$ を固有値にもつ $A \otimes B$ の固有ベクトルとなることを示せ．

(3) 実行列

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

2: 微分積分

$\arctan(x)$ は $\tan x$ の<ruby>逆関数<rt>ぎゃくかんすう</rt></ruby> (inverse function) を表すものとする．以下の各問に答えよ．必要であれば

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

(C は<ruby>積分定数<rt>せきぶんていすう</rt></ruby> (constant of integration)) を用いてもよい．

(1) $\beta > \alpha > 0$ とする．$D_1(\alpha,\beta) := \{(x,y) \mid 0 \le y \le x,\ \alpha \le x \le \beta\}$ に対して，

$$S_1(\alpha,\beta) := \iint_{D_1(\alpha,\beta)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$$

を求めよ．

(2) $n \ge 1$ とする．$D_2(n) := \{(x,y) \mid \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 16,\ \ 0 \le y \le x\}$ に対して，

$$S_2(n) := \iint_{D_2(n)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$$

を求めよ．

(3) $D_3 := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 16,\ \ x \ge 2\sqrt{2},\ \ y \ge 0\}$ に対して，

$$S_3 := \iint_{D_3} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$$

を求めよ．

3: 代数学

θ を代数的整数 (algebraic integer) とし，その最小多項式 (minimal polynomial) の定数項 (constant term) を n とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[\theta]$ の元 (element) α を $\alpha = a + \beta\theta$ $(a \in \mathbb{Z},\ \beta \in \mathbb{Z}[\theta])$ と表したとき，写像 (mapping)

$$\mathbb{Z}[\theta] \ni \alpha \mapsto \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

は well-defined であることを示せ．

(2) 有理素数 (rational prime number) p に対して，

$$\mathbb{Z}[\theta]/(p, \theta) \cong \begin{cases} O & (p \nmid n) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & (p \mid n) \end{cases}$$

を示せ．ただし，O は零環（zero ring）とする．

4: 数学基礎論

以下の$\mathcal{C}$-対象 (object) と$\mathcal{C}$-射 (morphism) からなる圏 (category) を$\mathcal{C}$と書く.

- $\mathcal{C}$-対象とは，集合 $|X|$ から実数の単位区間 $[0,1]$ への写像 $E_X\colon |X| \to [0,1]$ の対 $X = (|X|, E_X)$ を指すとする.
- $\mathcal{C}$-対象 X, Y の間の$\mathcal{C}$-射 $f\colon X \to Y$ とは，写像 $f\colon |X| \to |Y|$ であって，任意の $x \in |X|$ に対して，$E_X(x) \le E_Y\ f(x))$ を満たすものとする.

$\mathcal{C}$-対象 Z を終域 (codomain) とするモノ射 (monomorphism) $m\colon A \rightarrowtail Z$ と $n\colon B \rightarrowtail Z$ に対して，$m \le n$ とは，ある$\mathcal{C}$-射 $\varphi\colon A \to B$ が存在して，$m = n \circ \varphi$ となることである．また，$m \le n$ かつ $n \le m$ であるとき，$m \equiv n$ と書く．Z を終域とするモノ射の $\equiv$-同値類を Z の部分対象 (subobject) と呼ぶ．このとき，Z の部分対象全体は上記の関係 $\le$ によって半順序付けられ，これを $\mathrm{Sub}(Z)$ と書く.

以下の各問に答えよ.

(1) 圏$\mathcal{C}$が二項積 (binary product) および二項余積 (binary coproduct) を持つことを示せ.

(2) 任意の$\mathcal{C}$-対象 Z に対して，その部分対象半順序 $\mathrm{Sub}(Z)$ が束 (lattice) をなすことを示せ.

5: 量子力学

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ （ただし, $i := \sqrt{-1}$）とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) X が観測量 (observable) を表すことを示せ．

(2) 指数行列 (matrix exponential) $e^{i\frac{\pi}{4}X}$ を 2 行 2 列の行列で表せ．

(3) 状態 (state) $|\varphi\rangle$ 及び $|\psi\rangle$ に対して，期待値 (expectation value) $\langle X \rangle_\varphi := \langle \varphi | X | \varphi \rangle$ と $\langle X \rangle_\psi := \langle \psi | X | \psi \rangle$ を求めよ．

(4) 量子系 (quantum system) の状態が，ある確率 (probabilty) p で $|\varphi\rangle$，確率 $1-p$ で $|\psi\rangle$ となっている場合を考える． このときの X の期待値を求めよ．

(5) 二体量子系 (two-body quantum system) の状態 $|\Phi\rangle = \dfrac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$ を考える．このときの期待値 $\langle X \otimes X \rangle_\Phi := \langle \Phi | X \otimes X | \Phi \rangle$ を求めよ．

(6) 二体量子系の状態が，ある確率 p で $|0\rangle \otimes |0\rangle$，確率 $1-p$ で $|1\rangle \otimes |1\rangle$ となる場合を考える． このときの $X \otimes X$ の期待値を求めよ．

6: 離散最適化

以下の各問に答えよ．

(1) 以下のオーダー表記 (O-notation) を簡潔にせよ (simplify)．結果だけ示せばよい．

(i) $O(32n^{2.8}(\log n)^{15} + 0.1n^3 + n^2\sqrt{n})$

(ii) $O((3/2)^n + 50n^{20})$

(iii) $O(n^{0.1+\log_2 5} + 5^{\log_2 n})$

(2) 各要素 (item) j ($j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$) の利得 (profit) p_j と重み (weight) w_j，および ナップサックの容量 (capacity) c が与えられたとき，n 個の要素からいくつかを選んでナップサックに入れ，それらの重みの合計がナップサックの容量を超えないという条件 (constraint) のもとで，利得の合計を最大化する問題をナップサック問題 (knapsack problem) と呼ぶ．すなわち，ナップサックに入れる要素集合を $X \subseteq J$ とすると，条件 $\sum_{j \in X} w_j \leq c$ のもとで $\sum_{j \in X} p_j$ を最大化 (maximize) する X を求める問題である．条件 $\sum_{j \in X} w_j \leq c$ を満たす X を実行可能解 (feasible solution) という．以下では $\sum_{j \in J} w_j > c$ を仮定する．以下の各小問に答えよ．

(i) 以下の問題例 (problem instance) に対するできるだけ良い実行可能解を示せ．

j	1	2	3	4	5
w_j	5	6	7	8	9
p_j	4	5	6	7	8

$c = 19$

(ii) ナップサック問題を整数計画問題 (integer programming problem) に定式化せよ．

(iii) J の要素を p_j/w_j の大きい順に並べた順序を $j_1, j_2, \ldots, j_n$ とし (すなわち $p_{j_1}/w_{j_1} \geq p_{j_2}/w_{j_2} \geq \cdots \geq p_{j_n}/w_{j_n}$)，$j_1, j_2, \ldots$ の順にナップサックに入れるものを選んでいく (j_l を入れると容量を超えてしまう時は次の要素 j_{l+1} を試す) 欲張り法 (greedy method) を考える．以下のそれぞれに対し，主張 (claim) が正しければ証明 (prove) し，正しくなければ反例 (counter example) を挙げよ．

主張 A. 欲張り法によって常に最適解 (optimal solution) が得られる．

主張 B. ある定数 α (> 0) が存在し，欲張り法によって得られる総利得 z と最適値 (optimal value) z^* の比 z/z^* は常に α 以上になる．

(iv) 上の問 (2) の (iii) で定義したソート列 (sorted sequence) $j_1, j_2, \ldots, j_n$ の順にナップサックに入れていくとき，初めてナップサックの容量を超える要素を j_{l^*} (すなわち $\sum_{l=1}^{l^*-1} w_{j_l} \leq c < \sum_{l=1}^{l^*} w_{j_l}$) とする．以下の主張が正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

主張 C. $(c - \sum_{l=1}^{l^*-1} w_{j_l}) p_{j_{l^*}} / w_{j_{l^*}} + \sum_{l=1}^{l^*-1} p_{j_l}$ は最適値の上界 (upper bound) を与える．

注． 整数計画問題は,

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_j x_j & \\
\text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}, & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

と書ける問題である．ここで x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は決定変数 (decision variables)，n, m, d_j, a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ は所与の定数 (given constants) である．