# 平 成 ３ ０ 年 度

# 名古屋大学大学院情報学研究科
# 数理情報学専攻
# 入 学 試 験 問 題

## 専　　　門

平成３０年２月８日（木）
１３：３０～１５：００

## 注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語での回答は可能。語学辞書（1冊）持ち込むことが可能。
ただし、電子辞書の持ち込みは認めない。

4．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認すること。

5．問題は線形代数、微分積分、離散数学（グラフ理論含む）の３科目ある。
このうち<u>２科目を選択して</u>解答すること。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。
ただし、<u>離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。離散数学を</u>
<u>選択する場合は、IまたはIIの一方のみに答えよ。</u>

6．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

8．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出すること。

9．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

**問題 1.** (線形代数)

$\mathbb{R}^3$ における次のベクトルを考えよ:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ここで $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) ある行列 $M$ に関する式

$$\boldsymbol{w}_i = M\boldsymbol{v}_i \qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (*)$$

を成立させる $a, b, c \in \mathbb{R}$ を見つけよ．

(2) 式 $(*)$ を満たす $M$ を具体的に記述せよ．

(3) 行列 $M$ を対角化（diagonalize）せよ．

**問題 2.** (微分積分)

以下の各問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-x^2}$ の増減・極値・凹凸および変曲点 (inflection point) を調べてグラフを書け．

(2) $zw$-平面上の領域 $E$ を直線 $w = 0$, $z = 1$ および $z = w$ で囲まれた部分とする．重積分

$$\iint_E e^{-z^2}\,dz\,dw$$

の値を求めよ．

(3) $xy$-平面上の領域 $D$ を直線 $x + y = 0$, $x - y = 1$ および $y = 0$ で囲まれた部分とする．重積分

$$\iint_D 4e^{-(x-y)^2}\,dx\,dy$$

の値を求めよ．

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ．解答用紙の科目名欄に, どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

# I.

以下の各問に答えよ．

(1)

$$\frac{1}{(1-x)(1-ax)}$$

のマクローリン展開（Maclaurin expansion）を求めよ．

(2)

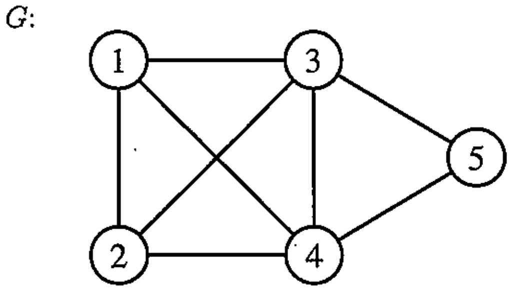
$$\frac{1-abx^2}{(1-x)(1-ax)(1-bx)(1-abx)}$$

のマクローリン展開を求めよ．

## II.

以下の各問に答えよ．

(1) 次の図のグラフ $G$ について，以下の各問に答えよ．



(i) $G$ の隣接行列 $A$ を求めよ．

(ii) $A^2$ を求めよ．

(iii) 頂点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の路がいくつあるかを答えよ．また，その導出方法を述べよ．

(2) $m$ ($\geq 1$) 本の辺を持つ連結な単純無向グラフ $G$ の隣接行列を $A$ とする．以下の各問に答えよ．

(i) 主張 1: 「行列 $A^2$ の対角成分の総和は $2m$ となる」
主張 1 が正しいか否かを答えよ．正しい場合は証明を与え，そうでない場合は反例を示せ．

(ii) 主張 2: 「$A^k$ ($k \geq 1$) の $(i, j)$ 要素は $G$ の頂点 $i$ と $j$ を結ぶ長さ $k$ の路（単純路でないものや初等路でもないものも含む）の数と等しい」
主張 2 が正しいか否かを答えよ．正しい場合は証明を，そうでない場合は反例を与えよ．

用語．グラフ: graph, 無向: undirected, 隣接行列: adjacency matrix, 対角成分: diagonal elements, 頂点: vertex, 辺: edge, 連結: connected, 単純グラフ: simple graph (並列辺も自己ループも含まないグラフ), 並列辺: parallel edges (多重辺 (multiple edges) ともいう), 自己ループ: self-loop (ループ (loop) ともいう), 路: path, 単純路: simple path, 初等路: elementary path, 路の長さ: length of a path (路に含まれる辺数).