平成２９年度

名古屋大学大学院情報学研究科
数理情報学専攻
入学試験問題

専門

平成２９年２月８日（水）
１３：３０～１５：００

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、日本語から母語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

４．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認すること。

５．問題は線形代数、微分積分、離散数学の３科目である。
このうち２科目を選択して解答すること。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。

ただし、離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。
離散数学を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ。

６．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

８．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出すること。

９．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1.（線形代数）

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の各問に答えよ．

(i) A の固有値 (eigenvalue) をすべて求めよ．

(ii) A^{100} を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, 0, 1, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 1, 2)$ とするとき，以下の各問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ (unit vector $\boldsymbol{u}$ orthogonal to $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, and $\boldsymbol{v}_3$) を求めよ．

(ii) W を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間 (subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, and $\boldsymbol{v}_3$) とする．ベクトル $(1, 2, 3, a)$ から W への距離 (distance) が 3 であるとき，a を求めよ．

問題 2.（微分積分）

以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-a|}$ （ただし，$a > 0$）として，f の最大値 (maximum value) を求めよ．

(2) T を空間 $\mathbb{R}^3$ に含まれる領域 $T = \{(x, y, z) : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1, x^2+y^2+(z+1)^2 \leq 3\}$ として，その体積 (volume) を求めよ．

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である. 次の I, II のいずれか一つを選択して答えよ. 解答用紙に, どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ.

I.

φ を Euler 関数とする. 以下の各問に答えよ.

(1) $\varphi(2^{17}-1) \equiv 0 \mod 17$ を証明せよ. ただし, 必要ならば $2^{17}-1$ が素数 (prime number) であることを利用してよい.

(2) $\varphi(2^{2017}-1) \equiv 0 \mod 2017$ を証明せよ. ただし, 必要ならば 2017 が素数であることを利用してよい.

II.

以下の各問に答えよ．

(1) 4 頂点の単純有向グラフで，2 頂点の次数が 3，残り 2 頂点の次数が 2 であるものを考える．この条件に加えて以下の条件を満たすグラフが存在する場合はその 1 つを描き，存在しない場合はその旨を理由とともに述べよ．

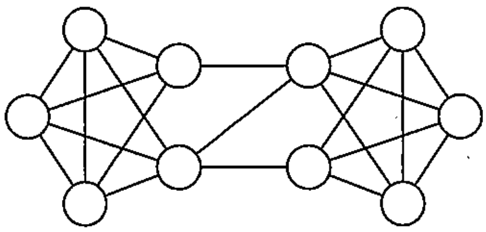
 (i) 1 頂点の出次数が 2，残り 3 頂点の出次数が 1．

 (ii) 2 頂点の出次数が 2，残り 2 頂点の出次数が 0．

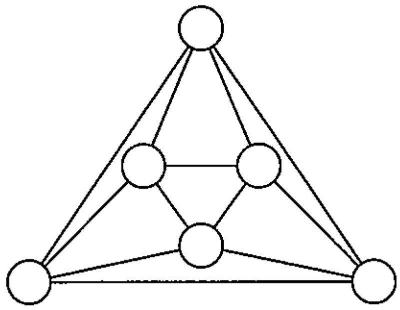
(2) 単純無向グラフ $G = (V, E)$ に対して $\bar{G} = (V, \bar{E})$ を G の補グラフという (ただし $\bar{E} = \{(u, v) \mid u, v \in V, (u, v) \notin E\}$)．次数が奇数の頂点が G 中に r 個あるとき，$\bar{G}$ 中に次数が奇数の頂点がいくつあるかを答えよ．
ヒント．G の頂点数 $n = |V|$ の偶奇に注目せよ．

(3) 無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V| \geq 2$) を考える．G から任意の $l - 1$ 本以下の辺を除いても残されたグラフが連結であるとき，G は l 辺連結であるという．また，G が l 辺連結である最大の l を G の辺連結度といい，$\lambda(G)$ と記す．すなわち，$\lambda(G) = \min\{|F| \mid F \subseteq E,\ (V, E \setminus F)$ は非連結$\}$ である．

 (i) 以下のグラフの辺連結度はいくつであるかを答えよ．



グラフ (a)



グラフ (b)

 (ii) グラフ G の最小次数を $\delta(G)$ と記す．$\lambda(G) \leq \delta(G)$ であることを示せ．

用語．グラフ: graph, 有向: directed, 無向: undirected, 単純グラフ: simple graph (並列辺も自己ループも含まないグラフ), 並列辺: parallel edges (多重辺 (multiple edges) ともいう), 自己ループ: self-loop (ループ (loop) ともいう), 頂点: vertex, 辺: edge, 次数: degree, 出次数: out degree, 補グラフ: complement graph, 奇数: odd number, 連結: connected.